В. Беллюстинъ,
директоръ учительской семинаріи.

МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ.

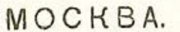
ЧАСТЬ IV:

курсъ четвертаго года обученія въ начальныхъ и двухклассныхъ училищахъ.

Изданіе 5-е.

Печатанное съ измѣненіями со 2-го, допущеннаго У. К. М. Н. П. въ учит. библіотеки низшихъ училищъ.

Цѣна 25 коп.



МОСКВА.
Изданіе книжнаго магазина М. Д. НАУМОВА.
Бол. Лубянка, д. Страхового Общества «Россія».
1915.



Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Москва, Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Въ чемъ должно состоять расширеніе курса начальной ариѳметики. Русская начальная школа ограничивалась въ послѣднее время, въ громадномъ большинствѣ случаевъ, тремя годами обученія. Такъ какъ и въ эти три года имѣется едва по 150 учебныхъ дней въ году, то естественно ожидать, что научить многому начальная школа не можетъ: она кладетъ слабыя основы знаній и умѣній. Для всякаго человѣка, сочувствующаго народному просвѣщенію, очевидно, что нужда въ расширеніи курса начальной школы и въ увеличеніи учебнаго времени настоятельна. Разрѣшеніе этого вопроса мы видимъ въ нѣкоторыхъ начальныхъ школахъ, вводящихъ вмѣсто трехгодичнаго курса четырехгодичный, и въ двухклассныхъ училищахъ, разсчитанныхъ на 5 лѣтъ обученія. До настоящаго времени программа этихъ школъ повышеннаго типа не выработалась опредѣленно и не выяснилась. То ее приравниваютъ, по крайней мѣрѣ по ариѳметикѣ, къ программѣ трехгодичной школы съ нѣкоторымъ прибавленіемъ задачъ, то ее берутъ изъ программы среднихъ учебныхъ заведеній, которая сама довольно устарѣла и вообще несовершенна.

Намъ предстоитъ, поэтому, рѣшить вопросъ: что же нужно намѣтить для 4-го года по ариѳметикѣ? Прежде всего отвѣтимъ опредѣленно, что четвертый годъ долженъ дать нѣчто новое сравнительно съ первыми тремя и что прибавленіемъ лишняго года надо воспользоваться для расширенія преподаванія, а не только для облегченія его и для распредѣленія прежняго курса на четыре года. Наиболѣе важнымъ и полезнымъ отдѣломъ, который желательно ввести въ курсъ четвертаго года, является отдѣлъ о дробяхъ. Онъ важенъ прежде всего съ практической стороны, потому что всякій мало-мальски развитой человѣкъ и въ жизни и въ литературѣ наталкивается на дробныя величины, такъ что ограничиваться цѣлыми

числами для него совсѣмъ нельзя. Съ другой стороны и образовательная цѣль обученія удовлетворяется при прохожденіи дробей, такъ какъ дроби являются логическимъ слѣдствіемъ ранѣе изученныхъ цѣлыхъ чиселъ, онѣ служатъ на этой ступени подходящимъ матеріаломъ для мышленія и такимъ образомъ изученіе ихъ дѣйствуетъ развивающе. Для разбираемаго момента мы считаемъ курсъ дробей болѣе посильнымъ и болѣе соотвѣтствующимъ, чѣмъ теоретическія обобщенія по ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ или же введеніе замысловатыхъ задачъ. И то, и другое менѣе важно въ практическомъ отношеніи, чѣмъ дроби, и менѣе полезно въ образовательномъ отношеніи, такъ какъ менѣе соотвѣтствуетъ силамъ и запросамъ дѣтей на данной ступени. Теоретизацію ариѳметики лучше всего отнести на самый конецъ, когда уже будутъ пройдены дроби, такъ какъ всякое обобщеніе умѣстно только послѣ изученія фактовъ, дающихъ это обобщеніе, а не передъ фактами. Замысловатыя же задачи, которыя съ большимъ удобствомъ рѣшаются алгеброй, и относить нужно къ алгебрѣ, потому что въ ариѳметикѣ есть достаточно своихъ развивающихъ элементовъ, такъ что не представляется никакой надобности въ томъ, чтобы вводить еще отдѣлы изъ другихъ наукъ, особенно когда эти отдѣлы превышаютъ силы учениковъ и поэтому не могутъ дать истинно развивающаго матеріала.

Итакъ, курсъ четвертаго года, какъ дополнительный къ курсу начальной трехгодичной школы, долженъ состоять изъ отдѣла о дробяхъ.

§ 2. Раздѣленіе курса дробей на два: приготовительный и систематическій. Требованіе концентричности, которое современная педагогика прилагаетъ ко всѣмъ учебнымъ предметамъ, приводитъ насъ къ необходимости раздѣлить и курсъ дробей на два: приготовительный и систематическій. Центромъ обоихъ курсовъ является производство дѣйствій надъ дробями, при этомъ въ первомъ курсѣ выводы основываются на наглядности и на свободномъ соображеніи и примѣняются, главнымъ образомъ, къ такимъ числамъ, которыя допускаютъ наглядность и свободное устное вычисленіе; второй же концентръ распространяетъ дѣйствія надъ дробями на любыя числа, примѣняя къ нимъ выводы, добытые въ первомъ концентрѣ. Польза такого раздѣленія на 2 концентра несомнѣнна, такъ какъ благодаря ему получается ясность и основательность усвоенія. Именно, ясность вызывается тѣмъ, что свой-

ства дробей сперва изучаются на небольшихъ величинахъ, доступныхъ конкретному воспріятію, и эти свойства являются для дѣтей не чѣмъ-то чуждымъ, даннымъ извнѣ, а вытекающимъ съ очевидностью изъ доступныхъ примѣровъ. Основательность же усвоенія обусловливается тѣмъ, что усвоенныя на небольшихъ числахъ и на наглядныхъ пособіяхъ правила распространяются потомъ на всѣ остальныя числа и слѣдовательно при этомъ повторяются, внося однако, нѣчто новое, дополнительное, чѣмъ поддерживается интересъ обученія.

Поэтому, если курсъ дробей дѣлить на два года (а въ одинъ его не пройти), то мы горячо рекомендуемъ учителю не дѣлить его на такія двѣ части: a) дроби простыя и b) дроби десятичныя. Это будетъ чисто механическимъ дѣленіемъ, основаннымъ не на сущности предмета и не на требованіяхъ педагогики, а лишь на главахъ и страницахъ учебника. Мы предлагаемъ въ 4-й годъ проходить приготовительный курсъ дробей (простыхъ и десятичныхъ), а уже въ пятый годъ, если онъ имѣется, дополнить и обобщить приготовительный курсъ и обратить его въ болѣе систематическій. Выгода такого дѣленія будетъ состоять еще въ томъ, что ученикъ, прошедшій только четырехгодичную школу, не лишенъ будетъ краткихъ свѣдѣній какъ изъ отдѣла простыхъ дробей, такъ и десятичныхъ. И тѣ, и другія одинаково нужны для жизни и доступны для пониманія. Простыя дроби болѣе вошли въ обиходъ русскаго народа, который такъ любитъ считать половинами, четвертями и восьмушками; десятичныя же дроби, по своему родству съ десятичной нумераціей, важны въ теоретическомъ отношеніи, не говоря уже о томъ, что имъ предстоитъ будущность и въ практическихъ расчетахъ, при условіи введенія метрической системы мѣръ.

§ 3. Какія дроби поставить ранѣе: простыя или десятичныя. Во всѣхъ тѣхъ государствахъ, гдѣ введена метрическая система мѣръ, десятичнымъ дробямъ отдается предпочтеніе передъ простыми и онѣ проходятся ранѣе. На это есть та побудительная причина, что десятичныя дроби знакомы народу вслѣдствіе пользованія метрической системой, и дѣйствія надъ ними — сложеніе, вычитаніе, умноженіе на цѣлое число, дѣленіе на цѣлое число совершаются по тѣмъ же самымъ правиламъ, какъ и дѣйствія надъ цѣлыми числами.

У насъ въ Россіи простыя дроби гораздо доступнѣе и нужнѣе. У насъ всѣ расчеты съ долями ведутся на половины, четверти,

восьмушки, трети, пятыя, седьмыя, двѣнадцатыя, и очень рѣдко на десятыя.

При существованіи десятичной системы счисленія и общей ея распространенности, у насъ не исчезъ еще счетъ парами, тройками, пятками и дюжинами, поэтому тѣмъ болѣе въ дробяхъ было бы нераціонально поставить на первый планъ десятыя доли.

Такимъ образомъ, при выборѣ долей наша школа должна отдать предпочтеніе простымъ передъ десятичными. Это не противорѣчитъ и теоріи ариѳметики, такъ какъ изъ дѣйствій надъ простыми дробями вполнѣ возможно вывести всѣ дѣйствія надъ десятичными: десятичныя дроби составляютъ только частный случай простыхъ дробей.

§ 4. Подготовка къ дробямъ въ теченіе первыхъ трехъ лѣтъ. Еще съ самаго перваго года учащіеся постепенно вводятся въ кругъ свѣдѣній о дробныхъ числахъ. Можно сказать, дѣти еще до школы запасаются представленіями о доляхъ, такъ какъ имъ постоянно приходится встрѣчать половину, полфунта чаю, четвертку; представленія о неравныхъ частяхъ имъ попадались еще чаще, именно въ случаѣ разбитыхъ предметовъ, разорванныхъ, разломанныхъ, наполовину съѣденныхъ и т. п. Однимъ словомъ, представленія о доляхъ, какъ равныхъ, такъ и неравныхъ, уже приносятся дѣтьми въ школу готовыми. За три года ученія доли распространяются и обобщаются. Надъ простѣйшими долями, — половинами, четвертями и восьмыми, отчасти третьими, шестыми и десятыми — производятся въ первые три года всѣ дѣйствія, правда, безъ правилъ, по соображенію и нагляднымъ способомъ. Въ этомъ состоитъ распространеніе первоначальныхъ дошкольныхъ свѣдѣній о дробяхъ. Къ обобщающимъ же средствамъ принадлежитъ письменное обозначеніе дробей, такъ какъ при немъ сообщается способъ, общій для всякихъ дробей.

Кромѣ прямыхъ свѣдѣній о доляхъ, первые три года обученія оказываютъ еще косвенную услугу главѣ о дробныхъ числахъ. Дѣло въ томъ, что между именованными числами и дробями можетъ быть проведена полная аналогія и всѣ свойства, относящіяся къ дробямъ, можно выводить изъ свойствъ именованныхъ чиселъ и объяснять при помощи ихъ. Такъ, напр., сокращеніе дробей есть въ сущности то же самое, что превращеніе именованныхъ чиселъ, потому что и тутъ и тамъ болѣе мелкія единицы выражаются въ болѣе крупныхъ, на основаніи опредѣленнаго единичнаго отно-

шенія, которое въ именованныхъ числахъ принято людьми по условію, а въ дробяхъ вытекаетъ изъ сравнительной величины знаменателей.

Такая связь между дробями и именованными числами, основы для которой устанавливаются въ первые три года, имѣетъ громадное значеніе для сознательности прохожденія дробей. Всякая сознательность требуетъ сопоставленія и соединенія новаго знанія съ предшествующимъ, но что же можетъ больше укрѣплять сознательность, какъ не выводъ цѣликомъ новаго знанія изъ предшествующаго ему. Чѣмъ тѣснѣе связь, иначе сказать ассоціація, между свѣдѣніями о дробяхъ въ 4-мъ году и свѣдѣніями объ именованныхъ числахъ въ первые три года, тѣмъ больше пользы для соображенія учащихся и для ихъ умственнаго развитія. Въ виду этого мы вездѣ, гдѣ только представляется возможность, выводимъ знанія 4-го года изъ предшествующихъ знаній и, въ частности, изъ свѣдѣній, касающихся именованныхъ чиселъ.

§ 5. Содержаніе курса 4-го года. Если назначить для 4-го года приготовительный курсъ дробей, то этимъ ужъ опредѣляется содержаніе курса какъ по объему, такъ и по характеру. Очевидно, программа должна содержать 4 дѣйствія надъ дробями и всѣ тѣ отдѣлы, которые необходимы для 4-хъ дѣйствій, напр. понятіе о дробяхъ, обозначеніе ихъ и т. п. Сомнѣніе можетъ явиться только относительно нѣкоторыхъ отдѣловъ, которые мы здѣсь и разберемъ съ точки зрѣнія ихъ умѣстности и необходимости.

а). Статья о дѣлимости чиселъ, общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ. Она обыкновенно помѣщается передъ сокращеніемъ дробей и приведеніемъ ихъ къ одному знаменателю. Мы считаемъ нужнымъ отложить эту статью до систематическаго курса дробей и выставляемъ въ пользу этого мнѣнія такіе доводы. Статья о дѣлителяхъ довольно трудна для ученика, прошедшаго трехгодичный курсъ, благодаря своей отвлеченности и невозможности примѣненія наглядныхъ пособій. Она же является и довольно скучной, такъ какъ почти не допускаетъ задачъ съ житейскимъ содержаніемъ, кромѣ того, и цѣль ея представляется для дѣтей совершенно темной: дѣйствительно, она нужна для дробей, а дробей ученики не проходили, такъ что и необходимости ея для дробей видѣть не могли; между тѣмъ несомнѣнно, что не только взрослые, но и дѣти охотнѣе берутся за такую работу, въ которой они видятъ разумную цѣль, чѣмъ за такую, въ цѣлесообразности которой

они сомнѣваются. Но, можетъ быть, безъ статьи о дѣлителяхъ невозможенъ приготовительный курсъ дробей? Ничуть, онъ вполнѣ возможенъ, такъ какъ и сокращеніе дробей, и приведеніе ихъ къ одному знаменателю — а послѣднее необходимо для сложенія и вычитанія — прекрасно выполняются по свободному соображенію, на основаніи навыковъ въ устномъ счетѣ. Сокращеніе дробей можетъ итти послѣдовательно, дѣленіемъ на простѣйшихъ дѣлителей, т.-е. на 2, 3, 5 и т. п., что при доступныхъ числахъ совершается и безъ участія признаковъ дѣлимости довольно удобно. Приведеніе же дробей къ одному знаменателю мы сводимъ къ отысканію, при помощи догадки, такого числа, которое дѣлилось бы на данныхъ знаменателей. Если подбирать знаменателями числа употребительныя въ устномъ счетѣ, то при удовлетворительномъ устномъ счетѣ дѣти подбираютъ общаго знаменателя довольно быстро и съ успѣхомъ. Напр., каковъ общій знаменатель для 12-хъ и 15-хъ долей? —60.— Почему? — Потому что 60 дѣлится на 12 и 15. —Какъ догадались дѣти, что 60 дѣлится на 12 и на 15? Это они знаютъ изъ практики устнаго счета.

Ђ. Нахожденіе частей числа и цѣлаго числа по даннымъ частямъ не слѣдуетъ считать какими-то особыми дѣйствіями и ставить ихъ гдѣ-то передъ приведеніемъ къ одному знаменателю и сложеніемъ. Здѣсь нѣтъ никакихъ особыхъ дѣйствій, а есть только умноженіе и дѣленіе на дробь. Выдѣленіе этихъ двухъ вопросовъ въ особые отдѣлы только запутываетъ изложеніе и препятствуетъ учащимся составить правильное понятіе объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Поэтому мы относимъ оба эти вопроса къ тѣмъ дѣйствіямъ, гдѣ ихъ настоящее мѣсто, т.-е. къ умноженію и дѣленію дробей, и не слѣдуемъ примѣру нѣкоторыхъ учебниковъ, которые руководствуются въ этомъ случаѣ только подражательностью и заимствуютъ другъ у друга порядокъ, перешедшій изъ старинныхъ учебниковъ, имѣвшій тамъ нѣкоторый смыслъ, но потомъ его лишившійся. Дѣло въ томъ, что въ старинныхъ учебникахъ признавались не только простыя дроби, т.-е. дроби единицы, напр. $^2/_3$, $^3/_4$, но и сложныя дроби, т.-е. дроби дробей, въ родѣ $^2/_3$ трехъ четвертей, $^5/_6$ семи восьмыхъ и т. п. И всѣ 4 дѣйствія съ дробями разсматривались вдвойнѣ, т.-е. сперва съ дробями единицы, а потомъ съ дробями дробей. При этомъ неизмѣнно разъяснялось въ каждомъ дѣйствіи, что, прежде чѣмъ вести вычисленія съ дробями дробей, необходимо обратить ихъ въ дроби единицы, напр., $^3/_4$ пяти шестыхъ $= {}^5/_8$.

Вотъ въ чемъ заключается причина того обстоятельства, что нахожденіе частей числа выдѣляется въ особый отдѣлъ и ставится въ началѣ курса, вмѣсто того, чтобы помѣщаться въ главѣ объ умноженіи дробей. Въ настоящее время никто уже не разсматриваетъ „дроби дробей" отдѣльно, а подразумѣваетъ во всѣхъ дѣйствіяхъ дроби единицы, поэтому умѣстно освободиться отъ спеціальныхъ отдѣловъ „нахожденіе частей числа" и „нахожденіе числа по даннымъ частямъ" и отнести ихъ въ соотвѣтствующія статьи.

с. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя и, обратно, десятичныхъ въ простыя нужно для того, чтобы поставить въ связь тѣ и другія дроби и умѣть рѣшать вопросы, гдѣ встрѣчаются совмѣстно тѣ и другія дроби. Обращеніе простыхъ дробей въ точныя десятичныя не представляетъ большого труда, и его можно достаточно разъяснить въ 4-мъ году. Но періодическія дроби мы признаемъ нежелательными не только для 4-го года, а даже и для 5-го. Причина та, что теорія этихъ дробей не можетъ быть представлена въ ариѳметикѣ достаточно точно и основательно, слѣд. не можетъ оказать настоящаго развивающаго вліянія; для этой теоріи нужно отчетливое знаніе главы о предѣлахъ, которая излагается лишь въ старшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній. Во-вторыхъ, и практическаго значенія періодическія дроби не имѣютъ, потому что почти всѣ дѣйствія надъ ними производятся съ большимъ трудомъ, и обыкновенно вычисляющій предпочитаетъ обращать эти дроби въ простыя. Есть и еще исходъ, который практикуется въ случаѣ безконечныхъ дробей: это ограничивать вычисленія съ ними сотыми долями, такъ какъ ни житейская точность ни даже научная не требуютъ въ огромномъ большинствѣ случаевъ такой пунктуальности, чтобы вводить въ расчеты тысячныя доли, десятитысячныя и т. п. Сопоставляя всѣ эти доводы, приходимъ къ заключенію, что глава о періодическихъ дробяхъ не имѣетъ настолько теоретической и практической цѣны, чтобы употреблять на нее дорогое учебное время. Эту главу надо признать пережиткомъ старины, подобно извлеченію корней, прогрессіямъ, фальшивому правилу и многимъ другимъ отдѣламъ, которые наконецъ нашли свое настоящее мѣсто въ алгебрѣ, а прежде помѣщались въ ариѳметикѣ по недоразумѣнію авторовъ, которые не брезговали ничѣмъ, что имѣло хотя бы отдаленное отношеніе къ ариѳметическимъ вычисленіямъ, такъ какъ другія математическія науки въ то время пользовались очень малой извѣстностью.

§ 6. Необходимость наглядности при прохожденіи курса 4-го года. О пользѣ наглядности мы уже говорили въ основныхъ методическихъ положеніяхъ и теперь коснемся ея еще разъ, преимущественно съ точки зрѣнія 4-го года. Мы потому неоднократно обращаемся къ принципу наглядности, что видимъ въ немъ основу и залогъ правильнаго изученія ариѳметики. Какъ ни отвлеченны математическія науки, но всѣ простѣйшія, основныя понятія въ нихъ образуются тѣмъ единственнымъ путемъ, какой возможенъ для всякихъ понятій: путемъ обобщенія конкретныхъ представленій. Безъ запаса образовъ немыслимы элементарныя понятія, а безъ ясныхъ и раздѣльныхъ элементарныхъ понятій невозможны и высшія, производныя понятія. Тѣ преподаватели, которые упускаютъ изъ виду наглядность при образованіи основныхъ понятій, сводятъ этимъ обученіе на заучиваніе словъ и фразъ, т.-е. тоже образовъ, но только звуковыхъ, и, главное, не связанныхъ другъ съ другомъ логически.

Изъ наглядныхъ пособій, примѣнимыхъ къ курсу дробей, укажемъ слѣдующія:

a. Образцы линейныхъ мѣръ, вырѣзанные изъ бумаги; по 1 или нѣсколько экземпляровъ на каждаго человѣка. При складываніи и разрѣзываніи этихъ мѣръ ученики могутъ прекрасно изучать образованіе долей и соотношеніе между ними, сокращеніе дробей и приведеніе ихъ въ одинаковыя доли. Болѣе удобныя линейныя мѣры въ этомъ случаѣ: аршинъ, футъ, метръ; изъ нихъ послѣдній годится для десятичныхъ дробей.

b. Вырѣзанные изъ бумаги образцы квадратныхъ мѣръ: кв. фута, кв. аршина и даже кв. метра (склеить нѣсколько писчихъ или газетныхъ листовъ). На нихъ также изучается происхожденіе дробей и ихъ взаимное соотношеніе, путемъ преобразованія однѣхъ долей въ другія. Такъ какъ кв. аршинъ, кв. футъ и кв. метръ можно разграфить на большое число частей — 256 кв. вершковъ, 144 кв. дюйма, 100 кв. дециметровъ — то эти пособія даютъ возможность разобрать множество мелкихъ долей.

c. Листы писчей бумаги, бумага съ награфленными клѣтками, бумажные кружки могутъ также сослужить хорошую службу въ дѣлѣ объясненія дробей, такъ какъ путемъ перегибанія и разрѣзыванія можно получать всевозможныя доли.

Очень важно, чтобы наглядныя пособія были довольно разнообразны: разнообразіе оживляетъ, такъ какъ даетъ отдыхъ; кромѣ

того, при разнообразныхъ наглядныхъ пособіяхъ и выводы будутъ яснѣе и тверже, потому что они получены изъ достаточнаго числа примѣровъ.

Для продуктивности работы, слѣдуетъ постараться, чтобы каждый ученикъ имѣлъ свой собственный экземпляръ хотя нѣкоторыхъ пособій. Тогда ученики будутъ внимательны, потому что будутъ работать не только зрѣніемъ, но и другими внѣшними чувствами. Да и объясненія будутъ для нихъ понятнѣе, какъ идущія съ большимъ участіемъ самихъ учениковъ. Въ четвертомъ отдѣленіи раздача наглядныхъ пособій на руки гораздо удобнѣе, чѣмъ, напримѣръ, въ первомъ: теперь и ученики болѣе взрослые, и ихъ обыкновенно бываетъ меньше, чѣмъ въ первомъ отдѣленіи.

§ 7. Методъ обученія. Эвристическій методъ обученія, т.-е. путь самостоятельнаго мышленія, направляемаго учителемъ, особенно примѣнимъ къ изученію математики и въ частности ариѳметики, такъ какъ эта наука изъ небольшого числа общихъ всѣмъ людямъ и несомнѣнныхъ данныхъ выводитъ путемъ логическихъ процессовъ сложную систему знаній, составляющихъ нашъ учебный предметъ. Чѣмъ далѣе углубляется ученикъ въ изученіе математики, тѣмъ болѣе примѣнимъ эвристическій методъ, такъ какъ у ученика тѣмъ болѣе накопляется матеріала, изъ котораго онъ можетъ строить выводы, и тѣмъ искуснѣе становится онъ въ построеніи. Принципъ самодѣятельности, важный въ началѣ обученія, еще болѣе важенъ въ концѣ обученія. Въ частности для четвертаго года мы обратимъ вниманіе учителя на слѣдующія примѣненія принципа самодѣятельности:

а. Задачи и примѣры для рѣшенія и объясненія, а также для вывода общихъ свойствъ и практическихъ правилъ, должны не столько диктоваться учителемъ, сколько составляться при участіи дѣтей или же подбираться ими. Дѣти теперь, какъ болѣе развитыя, легко попадаютъ на требуемые примѣры и задачи, такъ какъ скоро могутъ понять, какого характера работа отъ нихъ требуется. Свои примѣры и задачи совсѣмъ иное дѣло, чѣмъ данные учителемъ: они и интереснѣе, и доступнѣе, и болѣе затрогиваютъ мышленіе. Если учителю не удается получить отъ дѣтей примѣровъ для вывода правила, то пусть онъ постарается добиться примѣровъ хоть послѣ вывода; эти примѣры укрѣпятъ и уяснятъ правило. Точно также и задачи, предлагаемыя учениками, особенно же задачи короткія и устныя, придаютъ занятіямъ живость и интересъ. Еще

одна цѣнная сторона присуща упражненіямъ, придумываемымъ учениками: когда цѣлый классъ предлагаетъ примѣры одного типа, то въ это время болѣе сметливые успѣваютъ замѣтить обобщеніе, относящееся къ даннымъ примѣрамъ, и такимъ образомъ они незамѣтно приходятъ къ правилу, короткому и необременительному; такимъ путемъ усвоеніе правилъ превращается изъ отвлеченной и скучной работы въ интересную и живую.

Кромѣ придумыванія своихъ примѣровъ, для учениковъ полезно изощряться въ придумываніи способовъ производства дѣйствій и рѣшенія задачъ. Чѣмъ далѣе развивается ариѳметическій курсъ, тѣмъ все болѣе и болѣе путей открывается для рѣшенія вопросовъ, такъ какъ ученики знакомятся съ новыми отдѣлами, дающими практическія примѣненія. И ничто болѣе не объясняетъ и не просвѣтляетъ изученнаго матеріала, какъ отыскиваніе своихъ пріемовъ и ихъ объясненіе. Напр., правила, относящіяся къ десятичнымъ дробямъ, можно вывести или изъ дѣйствій съ десятичными же дробями, или изъ дѣйствій съ простыми дробями, или изъ дѣйствій съ именованными числами, или, наконецъ, съ цѣлыми отвлеченными. И вотъ, если ученикамъ удастся придумать отъ себя и объяснить всѣ эти пріемы, основанные на различныхъ отдѣлахъ ариѳметики, то они этимъ сразу повторятъ въ извѣстномъ направленіи весь курсъ ариѳметики и укрѣпятъ его въ своемъ сознаніи. Пріученіе къ открытію собственныхъ путей надо начинать еще на первыхъ ступеняхъ школьнаго курса и вести его постепенно, какъ о томъ нами своевременно упоминалось; на такихъ же болѣе высокихъ ступеняхъ, какъ четвертый и пятый годъ, это примѣненіе самодѣятельности должно составлять особую заботу учителя.

b. Четвертый и послѣдующіе года должны быть разсчитаны не только на занятія учениковъ съ учителемъ, но и на самостоятельныя, отчасти внѣклассныя работы. Темой для нихъ не должно быть заучиваніе какихъ-либо свѣдѣній по учебнику или запискамъ, а упражненія съ матеріаломъ, разработаннымъ вмѣстѣ съ учителемъ и разъясненнымъ. Дѣйствительно, заучиваніе теоріи обыкновенно даетъ дѣятельность только памяти и можетъ даже вредить соображенію, когда заучивается что-нибудь неясное и полупонятое; рѣшеніе же задачъ и примѣровъ и вообще упражненія на основаніи разъясненнаго матеріала приносятъ пользу мышленію и не могутъ дать вреда, потому что въ крайнемъ случаѣ, если работа выпол-

нена неудачно, то учитель можетъ исправить ошибку и на другомъ подобномъ упражненіи дать возможность стать на вѣрный путь. Чтобы ошибки въ упражненіяхъ, повторяясь, не могли создать неправильнаго навыка, учителю необходимо удостовѣряться, насколько удачно идутъ самостоятельныя работы учениковъ, и въ случаѣ непониманія, разъяснять и приводить къ правильному рѣшенію.

Простыя дроби.

Образованіе дробей и обозначеніе ихъ.

§ 8. Какъ объяснять происхожденіе дробей. Въ учебникахъ ариѳметики смотрятъ двояко на происхожденіе дробей: ихъ производятъ или отъ дѣленія или отъ измѣренія. Въ послѣднемъ случаѣ объясняютъ дѣтямъ, что иногда какая-нибудь мѣра, напр. аршинъ, укладывается въ данномъ протяженіи не цѣлое число разъ, а съ остаткомъ; чтобы измѣрить этотъ остатокъ, берутъ какую-нибудь долю аршина и накладываютъ ее на остатокъ; тогда протяженіе выразится въ цѣлыхъ аршинахъ и въ доляхъ его.

Образованіе дробей отъ измѣренія нельзя признать процессомъ яснымъ для начинающихъ учениковъ и мы не видимъ необходимости въ такомъ искусственномъ пріемѣ. Житейская практика, дѣла неграмотныхъ людей и историческія справки, относящіяся къ развитію ариѳметики, — все это согласно удостовѣряетъ, что дроби являются прежде всего результатомъ дѣленія, именно дѣленія на части, когда получается остатокъ, иначе сказать, когда дѣлимое меньше дѣлителя. Малыя дѣти, когда имъ дадутъ на двоихъ 1 пряникъ, прекрасно устроятся съ нимъ, т.-е. разломятъ пополамъ, и получатъ такимъ образомъ дробь единицы. Они еще не знаютъ никакого измѣренія, но могутъ получить дробь, слѣд. происхожденіе дробей отъ дѣленія на части надо признать болѣе естественнымъ и первоначальнымъ, чѣмъ образованіе ихъ при измѣреніи, т.-е. при дѣленіи по содержанію.

§ 9. Съ какихъ дробей начинать объясненіе. Такъ какъ мы производимъ дроби отъ дѣленія, то для первыхъ работъ надо взять такое дѣленіе, гдѣ бы дѣлимое и дѣлитель были возможно проще. Для дѣлимаго проще единицы нѣтъ ничего, и мы начнемъ съ дѣленія единицы на нѣсколько равныхъ частей. На сколько же частей дѣлить? Отвѣтъ на это дается практикой жизни, которая указы-

ваетъ, что люди болѣе всего склонны къ послѣдовательному дѣленію пополамъ, но не къ дѣленію на 3, на 5, на 10 или другія какія-нибудь произвольныя числа. Старинныя русскія земельныя мѣры всецѣло основаны на дѣленіи пополамъ: въ нихъ основная единица — **соха** — дѣлилась послѣдовательно на 2 части, при чемъ въ этомъ дѣленіи заходили довольно далеко.

Итакъ, начнемъ главу о дробяхъ съ послѣдовательнаго дѣленія единицы на 2, 4, 8 и 16 частей. Для нагляднаго представленія единицы можно воспользоваться бумажнымъ аршиномъ съ тѣмъ, чтобы перегибать его и разрѣзывать. Отчасти эти упражненія были въ третьемъ году, такъ что теперь ихъ приходится повторять и дополнять. Дѣти видятъ, что бумажный аршинъ дѣлится на двѣ равныхъ части; каждую часть они называютъ половиной; половинъ въ аршинѣ двѣ; половина вдвое меньше аршина. Аналогичные выводы получаются при дѣленіи каждаго полуаршина пополамъ, каждой четверти опять пополамъ и такъ до шестнадцатыхъ долей или, если пожелаетъ учитель, и далѣе: до 32-хъ, 64-хъ.

Одновременно съ образованіемъ дробей идетъ и письменное обозначеніе ихъ. Въ третьемъ году было показано, какъ обозначать $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^3/_4$, $^3/_8$ и т. п. Теперь надо еще разъ повторить объясненіе. Какъ, напримѣръ, пишется шестнадцатая доля? $^1/_{16}$. Что здѣсь обозначаетъ 1 и что 16? Единица показываетъ, что мы дѣлили 1 единицу; 16 показываетъ, что единица раздѣлена на 16 равныхъ частей; такъ какъ горизонтальная черта, проведенная между 1 и 16, обозначаетъ дѣленіе, то $^1/_{16}$ и принимается за результатъ дѣленія 1 на 16, т.-е. читается одна шестнадцатая.

Дроби съ числителемъ, равнымъ единицѣ, носятъ въ нѣкоторыхъ учебникахъ названіе аликвотныхъ дробей. Мы предпочитаемъ дать имъ знакомое названіе „доли“. Такъ что въ послѣдующемъ изложеніи условимся разумѣть подъ долей такую дробь, у которой числитель единица, напр. $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_{10}$ и т. п. Съ долями намъ придется имѣть дѣло во всѣхъ дѣйствіяхъ съ дробными числами: такъ какъ доля представляетъ простѣйшій видъ дроби, то, очевидно, всѣ дѣйствія надо разрабатывать сперва съ долями и потомъ уже переходить къ такимъ дробямъ, числитель которыхъ содержитъ нѣсколько единицъ.

§ 10. Послѣдовательное ознакомленіе съ долями. Послѣ того какъ дѣтямъ объяснено, какъ получается $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ и т. д., и продѣлано все это на аршинахъ, а если нужно, то и на

листахъ бумаги, надо перейти къ другимъ долямъ, менѣе употребительнымъ въ жизни и менѣе знакомымъ для дѣтей: $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_{12}$. Ихъ лучше всего пройти на бумажныхъ футахъ, потому что футъ, раздѣленный на дюймы, легко даетъ третьи, шестыя и двѣнадцатыя доли, а если пожелаетъ учитель, то еще двадцать четвертыя, сорокъ восьмыя. Чтобы закончить наглядное ознакомленіе съ долями, остается на метрѣ пройти образованіе $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{40}$, $^1/_{100}$ и др. долей, которыя съ удобствомъ отрѣзываются благодаря дѣленію метра на сантиметры. Какъ видитъ читатель, во всѣхъ этихъ случаяхъ мы беремъ какую-нибудь легкую долю мѣры ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$) и потомъ постепеннымъ раздвоеніемъ доходимъ до очень мелкихъ долей. Каковъ же результатъ нагляднаго ознакомленія съ долями? Дѣти получаютъ слѣдующія понятія: a) въ единицѣ всегда столько мелкихъ долей, на сколько частей мы дѣлили, т.-е. двадцатыхъ двадцать, сотыхъ сто и т. п.; это выводъ очень важный для послѣдующаго отдѣла, именно для раздробленія цѣлаго числа въ доли; b) если мы дѣлимъ на много частей, то части будутъ мелкія, а если на немного, то части будутъ крупныя, поэтому $^1/_{16}$ больше $^1/_{32}$ и $^1/_{100}$ больше $^1/_{200}$; въ этомъ случаѣ наглядность приноситъ громадную пользу для образованія правильнаго представленія: дѣти, съ которыми дроби проходятъ отвлеченно, нерѣдко сбиваются и думаютъ, что напр. $^1/_6$ меньше $^1/_{12}$; ихъ сбиваетъ привычка къ цѣлымъ числамъ, гдѣ они моментально говорятъ, что 6 меньше 12-ти.

§ 11. Переходъ отъ долей къ дробямъ. Послѣ того, какъ дѣленіе единицы на нѣсколько равныхъ частей усвоено, слѣдуетъ обратиться къ дѣленію другихъ чиселъ, напр. 2, 3. Если взять дѣленіе трехъ на 4 равныя части, то образованіе дроби приводится къ образованію долей такимъ образомъ. Пусть дано 3 яблока раздѣлить 4 ученикамъ поровну. Мы сначала беремъ первое яблоко и дѣлимъ его на 4 равныхъ части, будетъ каждому ученику по $^1/_4$, потомъ отъ второго яблока будетъ по одной четверти ($^1/_4$) и наконецъ отъ третьяго по $^1/_4$, всего на каждую часть придется по $^3/_4$. Почему три четверти пишется именно такъ: „$^3/_4$“? Потому что обозначеніе $^3/_4$ показываетъ, что три дѣлится на 4, а такъ какъ въ результатѣ получается три четверти, то этимъ же обозначеніемъ и выражается результатъ дѣйствія. Въ обозначеніи дробей мы видимъ то же самое, что напр. встрѣчаемъ въ образованіи составныхъ именованныхъ чиселъ: дано сложить 3 ф. съ 15 лотами, тогда отвѣтъ пишутъ въ видѣ „3 ф. 15 лот.“ или, какъ практикуется

въ иныхъ учебникахъ, „3 ф. + 15 лот.“. Здѣсь обозначеніе дѣйствія является въ то же время обозначеніемъ результата. Еще виднѣе это въ алгебрѣ: тамъ, если требуется сложить количество a съ количествомъ b, то получаютъ формулу „$a+b$“, которая одновременно выражаетъ и заданное дѣйствіе, и получающійся результатъ. Обозначеніе „$^7/_8$“ выражаетъ и дѣйствіе, т.-е. дѣленіе 7 на 8, и результатъ этого дѣйствія, т.-е. семь восьмыхъ долей.

На рядѣ послѣдовательныхъ примѣровъ ученики получаютъ понятіе, что отъ дѣленія одного числа на другое образуется столько долей, каково дѣлимое, и такихъ долей, каковъ дѣлитель. Разъяснимъ это еще на одномъ примѣрѣ, разборъ котораго можно провести отвлеченно, потому что дѣти уже въ работѣ съ долями запаслись нужными представленіями. Дано 11 рублей раздѣлить на 12 равныхъ частей. Беремъ первый рубль и дѣлимъ его на 12 равныхъ частей, получается $^1/_{12}$, беремъ второй и также дѣлимъ, получается $^1/_{12}$; отъ каждаго рубля получится по $^1/_{12}$, всего $^{11}/_{12}$. Результатъ мы пишемъ именно такъ „$^{11}/_{12}$“, потому что этимъ мы выражаемъ, что 11 дѣлится на 12.

Чтобъ убѣдиться въ томъ, что дѣти поняли происхожденіе и обозначеніе дробей, надо дать нѣсколько обратныхъ вопросовъ, т.-е. пусть учитель напишетъ „$^5/_{12}$“, „$^7/_{16}$“, „$^9/_{20}$“ и заставитъ учениковъ прочитать и объяснить. Первая дробь $^5/_{12}$ показываетъ результатъ дѣленія 5-ти на 12, она читается такъ „пять двѣнадцатыхъ“. Что отъ дѣленія 5-ти на 12 получается дѣйствительно пять двѣнадцатыхъ, это опять объясняется при помощи долей, т.-е. первая единица, раздѣленная на 12 равныхъ частей, даетъ въ каждой части $^1/_{12}$, также и вторая, и третья, и т. д , всего пять двѣнадцатыхъ. Для учителя тутъ можетъ возникнуть вопросъ: чьи это двѣнадцатыя доли? вѣдь это доли разныхъ единицъ? Конечно, разныхъ, но всѣ единицы равны между собою, слѣд. и одинаковыя доли ихъ равны между собою.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы вездѣ проводимъ тотъ взглядъ на дробь, что она есть частное отъ дѣленія одного числа на другое. Напр., дробь $^2/_3$ читается „двѣ трети“, эта дробь образовалась отъ дѣленія 2 на 3 и выражаетъ собой частное отъ этого дѣленія. Мы менѣе согласны съ другимъ опредѣленіемъ дроби, именно, что она представляетъ собою одну или нѣсколько равныхъ частей единицы: мы считаемъ его производнымъ, т.-е. вытекающимъ изъ перваго опредѣленія. Принимая за основное опредѣленіе, что дробь

есть частное отъ дѣленія одного числа на другое, мы этимъ ставимъ дроби въ ближайшую связь съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами и этимъ усиливаемъ степень пониманія дѣтей; кромѣ того, при нашемъ опредѣленіи легко объясняется обозначеніе дробей.

§ 12. Дѣленіе съ остаткомъ. Пройдя съ учениками образованіе долей, а потомъ образованіе дробей, слѣдуетъ перейти къ дѣленію большаго числа на меньшее, гдѣ частное получается сложное, состоящее изъ цѣлаго числа и дроби. Пусть данъ вопросъ „13 блиновъ раздѣлить поровну 8-ми ученикамъ". Беремъ 13 бумажныхъ кружочковъ и раздаемъ каждому изъ 8 учениковъ по кружку. Остающіеся 5 кружковъ дѣлимъ такъ: каждый разрѣзываемъ на 8 равныхъ кусковъ и даемъ ученику по куску. Всего на ученика придется по $1^{5}/_{8}$ кружка. Выводъ этотъ отчасти извѣстенъ изъ курса 3-го года и поэтому можетъ быть проведенъ самими учениками, съ небольшой развѣ помощью учителя.

Есть и еще способъ дѣленія 13 на 8, тотъ самый, который прилагался къ дѣленію меньшаго числа на большее. Именно, каждая единица, раздѣленная на 8 равныхъ частей, даетъ по $^{1}/_{8}$, т.-е. всего получится $^{13}/_{8}$. Учителю надо поощрить учениковъ въ открытіи новаго способа и убѣдить, что оба отвѣта, въ сущности, одинаковы, такъ какъ $^{8}/_{8}$ составляютъ единицу и слѣд. въ обоихъ случаяхъ получается по $1^{5}/_{8}$.

§ 13. Дѣленіе по содержанію. До сихъ поръ мы брали случаи дѣленія на части, такъ какъ этотъ видъ дѣленія понятнѣе дѣтямъ и объясненіе дробей при помощи его идетъ успѣшнѣе. Но для полноты пониманія необходимо рѣшить нѣсколько примѣровъ на дѣленіе по содержанію. Они могутъ быть двухъ родовъ: когда въ отвѣтѣ получается доля и когда въ отвѣтѣ получается дробь. Напримѣръ, какую часть пуда составляютъ 5 фунтовъ? Рѣшеніе: $5:40={}^{1}/_{8}$. Это потому, что 5 фунтовъ содержатся въ пудѣ 8 разъ и слѣдовательно составляютъ $^{1}/_{8}$ пуда. Примѣръ другого типа таковъ: какую часть пуда составляютъ 7 фунтовъ? Такъ какъ 7 фунтовъ не содержатся въ пудѣ цѣлое число разъ, то задаемся сначала вопросомъ, какую часть пуда составляетъ 1 фунтъ, получается $^{1}/_{40}$; другой фунтъ составляетъ тоже $^{1}/_{40}$ и такъ до седьмого, всего составится $^{7}/_{40}$.

§ 14. Понятіе о дроби, числителѣ и знаменателѣ. Заканчивая предварительныя упражненія, учитель долженъ сообщить названіе дроби, числителя и знаменателя и объяснить, что значатъ

эти названія. Ученики не чуждаются отвлеченныхъ понятій и даже интересуются ими, но только тогда, когда для этого есть достаточный запасъ свѣдѣній, дающихъ обобщеніе. Такъ и въ данномъ случаѣ. Учитель при помощи нагляднаго примѣра напоминаетъ, что бываютъ цѣлыя единицы и бываютъ доли, или части единицы; изъ частей, т.-е. долей, составляется дробь. Слѣд. опредѣленіе дроби получается такое: „дробью называется число, состоящее изъ частей единицы“, въ противоположность опредѣленію цѣлаго числа: „цѣлымъ числомъ наз. такое, которое состоитъ изъ цѣлыхъ единицъ“. На эти опредѣленія пусть ученики приведутъ свои примѣры, такъ какъ это лучшее средство для правильнаго пониманія. Затѣмъ идетъ бесѣда о числителѣ и знаменателѣ. Представивши наглядно дроби: $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, учитель спрашиваетъ, какія доли имъ взяты.— Четвертыя — Сколько ихъ взято въ каждомъ случаѣ? 1, 2, 3. — Такъ вотъ эти числа 1, 2, 3 носятъ названіе числителя дроби. Число же 4 есть знаменатель всѣхъ этихъ дробей. Еще берется нѣсколько дробей, указывается числитель и знаменатель и ставится вопросъ: что показываетъ числитель? — изъ сколькихъ долей состоитъ дробь.— Что показываетъ знаменатель? — изъ какихъ долей дробь составлена. Кромѣ этого опредѣленія не лишнимъ будетъ дать другое, изъ котораго наше вытекаетъ, именно: „числитель показываетъ число, которое дѣлится“, „знаменатель показываетъ, на сколько дѣлится числитель“. Эти опредѣленія, равно какъ и послѣдующія, хорошо бы записывать, потому что этимъ усвоеніе укрѣпляется, и подтверждать рядомъ примѣровъ, которые придумывали бы ученики и учитель.

Раздробленіе и превращеніе дробей.

§ 15. **Раздробленіе цѣлыхъ чиселъ въ доли.** Послѣ того, какъ учащимся объяснено образованіе дроби и дано понятіе о числителѣ и знаменателѣ, мы пойдемъ далѣе тѣмъ самымъ путемъ, какимъ развивается глава объ именованныхъ числахъ. Этотъ путь удобенъ для пониманія дѣтей, потому что онъ даетъ возможность основать новыя свѣдѣнія на пріобрѣтенныхъ ранѣе. При этомъ мы избѣгаемъ и нѣкоторыхъ лишнихъ правилъ, такъ какъ ссылаемся на извѣстныя, и нѣкоторыхъ лишнихъ терминовъ, такъ какъ пользуемся готовыми изъ статьи объ именованныхъ числахъ. Напр., вмѣсто новаго названія „обратить цѣлое число въ неправильную

дробь“ мы предпочитаемъ употреблять старое „раздробить цѣлое число въ доли“. Кстати упомянемъ, что термины „правильная дробь“ и „неправильная дробь“ не только излишни, но даже, пожалуй, и неумѣстны: неправильныя дроби ничего неправильнаго въ себѣ не содержатъ, да и учить чему бы то ни было неправильному школа не должна.

Раздробленіе цѣлаго числа въ доли начинается съ наглядныхъ примѣровъ, для которыхъ берутся употребительныя доли. „Сколько восьмушекъ въ 2 фунтахъ?“ — „Въ одномъ фунтѣ $^8/_8$, а въ 2-хъ будетъ два раза по $^8/_8$, т.-е. $^{16}/_8$“. — „Сколько третей въ 2 аршинахъ?“ — „Въ одномъ аршинѣ $^3/_3$, а въ двухъ будетъ $^3/_3 \times 2$, т.-е. $^6/_3$“. За этими вычисленіями слѣдуетъ взять такія, гдѣ въ дроби обращаются цѣлыя числа съ дробями. Напр., дано $5^3/_4$ раздробить въ четверти; въ единицѣ $^4/_4$, въ 5 единицахъ 5 разъ по $^4/_4$, т.-е. $^{20}/_4$, да еще есть у насъ $^3/_4$, получится $^{23}/_4$, такъ что $5^3/_4 = {}^{23}/_4$.

§ 16. Обращеніе дробей въ мелкія доли. Пользуясь раздробленіемъ цѣлыхъ чиселъ въ мелкія доли, можно теперь раздроблять и вообще всякія дробныя количества. Прежде всего надо дать понятіе о томъ, что размельчать дроби можно какъ угодно далеко и что всякая дробь можетъ получить при этомъ много различныхъ видовъ. Въ данномъ случаѣ послѣдовательное дѣленіе пополамъ приведетъ къ наиболѣе ясному выводу. Беремъ листъ бумаги и разрѣзываемъ его пополамъ, каждые полъ-листа опять пополамъ, затѣмъ четвертинки на осьмушки, далѣе на 16-я, 32-я, даже 64-я, 128-я, 256-я, 512-я, 1024-я и вообще пока ученики не поймутъ, что размельченіе идетъ безпредѣльно. Спрашивается теперь, сколько въ полъ-листѣ четвертинокъ, восьмушекъ или другихъ какихъ-либо долей. При этомъ объясненіе должно быть такое, напр. въ случаѣ обращенія половины въ стодвадцатьвосьмыя доли: „въ цѣлой единицѣ 128 стодвадцатьвосьмыхъ, а чтобы узнать, сколько въ половинѣ, надо 128 раздѣлить на 2, получится 64, слѣд. $^1/_2 = {}^{64}/_{128}$“. Послѣ всей работы постепеннаго раздвоенія ученики могутъ вывести самостоятельно цѣлый рядъ слѣдствій, относящихся къ раздробленію различныхъ дробей, въ родѣ $^1/_4 = {}^{16}/_{64}$, $^1/_8 = {}^4/_{32}$, $^1/_4 = {}^{64}/_{256}$, $^1/_8 = {}^{32}/_{256}$ и т. п. Умѣя раздроблять доли, ученики въ силахъ рѣшить подобные вопросы и съ дробями, въ которыхъ содержится нѣсколько долей. Напр. обратить $^5/_8$ въ шестьдесятъчетвертыя доли. Тогда ученикъ сперва узнаетъ, сколько шестьдесятъчетвертыхъ долей въ $^1/_8$ единицы, для этого $64:8 = 8$; потомъ

сообразить, что, если въ $^1/_8$ имѣется $^8/_{64}$, то въ $^5/_8$ 5 разъ по $^8/_{64}$, всего будетъ $^{40}/_{64}$. Еще примѣръ: сколько тридцатыхъ долей въ $^2/_3$? Въ единицѣ $^{30}/_{30}$, въ трети $^{10}/_{30}$, въ 2 третяхъ $^{20}/_{30}$. Такимъ образомъ раздробленіе крупныхъ дробей въ мелкія доли совершается при помощи перехода черезъ 1 долю.

Обращенію дробныхъ чиселъ въ мелкія доли мы придаемъ очень важное значеніе, потому что на немъ основывается приведеніе дробей къ одному знаменателю и вообще умѣнье устно производить дѣйствія надъ дробями. Настоятельно совѣтуемъ учителю обратить особенное вниманіе на эту работу и путемъ наглядныхъ упражненій утвердить въ ученикахъ правильное понятіе о раздробленіи и навыкъ быстро производить его, по крайней мѣрѣ, съ двузначными знаменателями. Удобнымъ пособіемъ въ этомъ случаѣ могутъ явиться листки клѣтчатой бумаги: каждому ученику дается кусочекъ со столькими клѣтками, какія доли желательно проработать; кусочекъ принимается за цѣлую единицу и потомъ перегибается на 2 части, на 3, на 4, 5 и т. д., если только число клѣтокъ въ немъ кратно этихъ чиселъ. Путемъ перегибанія и разрѣзыванья легко можно самимъ ученикамъ вывести, какія доли можно обратить въ данныя мелкія, какъ это сдѣлать и почему получится такой именно отвѣтъ. Если листокъ взятъ съ 36-ю, напр., клѣтками, то $1 = ^{36}/_{36}$; листокъ можно перегнуть пополамъ и тогда $^1/_2 = ^{18}/_{36}$; если же перегнуть на 3 части, тогда получится, что $^1/_3 = ^{12}/_{36}$ и $^2/_3 = ^{24}/_{36}$; если разрѣзать на 4 части, то $^1/_4 = ^9/_{36}$ и $^3/_4 = ^{27}/_{36}$. На пять частей перегнуть этотъ листокъ нельзя, такъ чтобы въ $^1/_5$ получилось нѣсколько тридцатьшестыхъ; изъ этого видно, что пятыя доли не раздробляются въ тридцатьшестыя. Точно также не раздробляются въ тридцатьшестыя и 7-я доли, 8-ыя, 10-ыя и т. д. На подобныхъ разборахъ ученики очень легко подмѣтятъ, что знаменатель мелкихъ долей долженъ быть таковъ, чтобы въ немъ содержался цѣлое число разъ знаменатель крупныхъ долей, иначе раздробленіе невозможно. Это очень важное свойство, отъ котораго зависитъ приведеніе дробей къ одному знаменателю: ученикъ долженъ быстро сообразить, что, напр., седьмыя доли раздробляются въ семидесятыя, такъ какъ 7 содержится въ 70-ти, и не раздробляются въ восьмидесятыя, такъ какъ въ $^1/_7$ 11 восьмидесятыхъ съ лишкомъ.

§ 17. Превращеніе дробей. Подъ превращеніемъ мы разумѣемъ дѣйствіе, обратное раздробленію, т.-е. выраженіе мелкихъ долей

въ крупныхъ доляхъ или даже въ цѣлыхъ числахъ. Съ послѣдняго мы и начнемъ. Оно носитъ обыкновенно названіе исключенія цѣлаго числа изъ неправильной дроби, но такъ какъ мы хотимъ опять отмѣтить аналогію дробей съ именованными числами, то и пользуемся терминомъ „превращеніе дробей“. Совершается оно такъ же, какъ и въ именованныхъ числахъ, т.-е. дѣленіемъ на единичное отношеніе. Если, напр., задано $^{32}/_{8}$ обратить въ цѣлыя единицы, то дѣлимъ 32 на 8, потому что каждыя 8 восьмыхъ составляютъ единицу; въ 32 восьмыхъ будетъ столько единицъ, сколько разъ 8 содержится въ 32-хъ. Здѣсь восемь является единичнымъ отношеніемъ цѣлой единицы къ восьмой долѣ.

Превращеніе мелкихъ долей въ крупныя лучше всего начать съ понятія о томъ, что подобное превращеніе дѣйствительно возможно. Для этого пользуемся наиболѣе доступными долями, именно тѣми, которыя получаются отъ постепеннаго раздвоенія; раздѣливши листъ бумаги хотя бы на 16 равныхъ кусочковъ, спрашиваемъ потомъ, что составятъ каждыя $^{2}/_{16}$. Ученики видятъ, что $^{2}/_{16} = ^{1}/_{8}$. Также идутъ вопросы о $^{2}/_{128}$, $^{2}/_{64}$, $^{2}/_{32}$, $^{2}/_{8}$, $^{2}/_{4}$. А можно ли $^{2}/_{5}$ превратить въ болѣе крупныя доли? — Нѣтъ, нельзя, потому что въ половинѣ $2^{1}/_{2}$ пятыхъ, въ четверти $1^{1}/_{4}$, въ трети $1^{2}/_{3}$ и слѣд. 2 пятыхъ нельзя выразить ни цѣлыми половинами, ни третями, ни четвертями. Изъ объясненнаго вытекаетъ, что не всегда мелкія доли превращаются въ крупныя. Этимъ превращеніе отличается отъ раздробленія, такъ какъ раздробить всегда можно во что-нибудь, а превратить не всегда.

Ходъ превращенія выяснятся на достаточномъ количествѣ примѣровъ съ небольшими дробями, которые разрабатываются наглядно. Если взять для работы, напр., футъ съ намѣченными на немъ дюймами, то прежде всего мы спросимъ: какія доли имѣются въ футѣ? — половины, трети, четверти, шестыя, двѣнадцатыя. — Что можно составить изъ $^{2}/_{12}$? — $^{1}/_{6}$. Какъ это объяснить? — въ футѣ 12 двѣнадцатыхъ, а мы взяли 2 двѣнадцатыхъ, и такъ какъ 2 въ 12 содержится 6 разъ, то $^{2}/_{12} = ^{1}/_{6}$. Чему равны $^{3}/_{12}$, $^{4}/_{12}$, $^{6}/_{12}$? $^{2}/_{6}$, $^{3}/_{6}$? $^{2}/_{4}$? $^{2}/_{3}$? — двѣ трети нельзя превратить въ крупныя доли, такъ какъ крупнѣе третьихъ бываютъ только половины, а въ половинѣ $1^{1}/_{2}$ третьихъ.

Болѣе легкими случаями превращенія являются тѣ, когда въ отвѣтѣ получается одна доля, какъ-то $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$ и т. п. Если же въ отвѣтѣ получается нѣсколько долей, т.-е. дробь, то эти случаи

разбираются съ бо́льшимъ трудомъ. Напр., обратить въ крупныя доли дробь $^8/_{12}$. До превращенія здѣсь еще ученику приходится сообразить, въ какія доли превращается $^8/_{12}$. Первая догадка является, что въ шестыя, такъ какъ двѣнадцатыя получаются изъ шестыхъ путемъ раздвоенія. И дѣйствительно, $^8/_{12} = {}^4/_6$, при чемъ ученики объясняютъ, что каждыя двѣ двѣнадцатыхъ образуютъ $^1/_6$, слѣд. въ восьми двѣнадцатыхъ будетъ столько шестыхъ, сколько разъ 2 содержится въ 8-ми. Но если дана будетъ дробь $^9/_{12}$, то здѣсь ученики должны догадаться, что нельзя соединять двѣнадцатыя доли по двѣ, потому что 2 не содержится цѣлое число разъ въ 9. Такимъ образомъ, основной вопросъ, который долженъ опредѣленно ставиться учителемъ въ примѣрахъ превращенія, это „по скольку мелкихъ долей вы будете соединять въ одну крупную". Въ примѣненіи къ дроби, напр. $^{300}/_{400}$, этотъ вопросъ приведетъ къ отвѣту „мы будемъ соединять по $^{100}/_{400}$, т.-е. по $^1/_4$, такъ какъ 100 четырехсотыхъ содержатся въ 300 четырехсотыхъ ровно 3 раза".

Превращеніе мелкихъ долей въ крупныя ничто иное, какъ сокращеніе дробей. Учитель, если пожелаетъ, сообщитъ этотъ терминъ, но ни особой пользы, ни нужды въ этомъ не видится. Терминъ этотъ нѣсколько неправиленъ, такъ какъ сама дробь не сокращается, т.-е. не становится короче, а укорачивается только числитель и знаменатель. Эта неточность термина стоитъ въ связи съ другимъ не совсѣмъ правильнымъ вопросомъ, который предлагается въ иныхъ учебникахъ: изъ сколькихъ чиселъ состоитъ дробь? — „изъ двухъ: числителя и знаменателя". Съ такимъ отвѣтомъ невозможно согласиться, потому что дробь представляетъ собой одно дробное число, а если ужъ разыскивать ея составъ, то вѣрнѣе будетъ сказать, что дробь состоитъ изъ столькихъ долей, каковъ числитель (сколько единицъ въ числителѣ).

Правило сокращенія дробей очень легко, и сообщить его и запомнить не составляетъ труда. Но пусть не соблазняется учитель этой легкостью: не все, что легко, то и хорошо. Правило пусть войдетъ въ сознаніе дѣтей, какъ ихъ свободный выводъ изъ методически подобранныхъ примѣровъ, т.-е. изъ наглядныхъ, доступныхъ. Велика радость дѣтей, когда имъ самимъ удается примѣтить правило; какой контрастъ съ тѣмъ тупымъ равнодушіемъ, съ какимъ выслушиваютъ дѣти правило учителя: нѣсколько разъ оно повторяется и все-таки забывается.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

§ 18. На чемъ основано приведеніе дробей къ общему знаменателю. Обыкновенно оно выводится изъ теоріи дѣлителей, при чемъ знаменатели разлагаются на первоначальныхъ производителей. Мы же избрали нѣсколько иной путь для приготовительнаго курса дробей (какъ о томъ упомянуто выше). Именно, по нашему мнѣнію, вполнѣ возможно и удобно ограничиться тѣми основаніями, какія даетъ наглядность и практика устнаго счета. Дѣйствительно, что значитъ привести къ одному знаменателю? Выразить дроби въ одинаковыхъ доляхъ. Но, вѣдь, раздробленіе крупныхъ долей въ мелкія уже пройдено и теперь остается только сосредоточить вниманіе на томъ, чтобы обращеніе совершалось въ одинаковыя доли.

§ 19. Первый случай. Какъ и всякій новый отдѣлъ, мы начинаемъ приведеніе дробей къ одному знаменателю съ его необходимости и цѣли: если учащіеся понимаютъ цѣль работы, то они трудятся осмысленно и съ интересомъ. Зачѣмъ нужно обращеніе въ одинаковыя доли? Прежде всего затѣмъ, чтобы сравнивать величины дробей. Итакъ, даемъ ученикамъ вопросъ для сравненія: „что больше: $^1/_2$ или $^7/_{10}$?“ — „половина, конечно, меньше, такъ какъ въ ней только $^5/_{10}$, слѣд. двухъ десятыхъ недостаетъ“. Такимъ путемъ сами дѣти натолкнулись на смыслъ дѣйствія и рѣшили простѣйшій примѣръ. Идетъ еще серія подобныхъ вопросовъ, гдѣ употребительныя доли ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ и т. п.) сравниваются по величинѣ съ близкими къ нимъ дробями. Всѣ вопросы надо подбирать такъ, чтобы они рѣшались простѣйшимъ случаемъ приведенія къ одному знаменателю, именно, когда одинъ изъ знаменателей является въ то же время общимъ. Проще этого случая нельзя дать, такъ какъ въ немъ не надо трудиться находить общаго знаменателя: онъ уже есть налицо, остается произвести раздробленіе, да и то одной только дроби.

По тому же образцу, какъ приводятся къ общему знаменателю двѣ дроби, приводятся три и болѣе дробей. Одинъ изъ знаменателей служитъ общимъ и въ эти доли обращаются всѣ прочія. Кромѣ умѣнья раздроблять здѣсь ничего не требуется.

§ 20. Второй случай. Къ нему относятся такія дроби, что ни одинъ изъ знаменателей не служитъ общимъ и поэтому приходится отыскивать общаго знаменателя. Напр., выразить въ одинаковыхъ

доляхъ $^1/_2$ и $^1/_3$. Дѣти видятъ, что ни половина въ третьи доли, ни треть въ половины не обращается. Значитъ, надо раздробить въ какія-то новыя дроби. Въ какія же? Очевидно, въ какія-то одинаковыя. И вотъ, практика устнаго счета и вообще знаніе состава чиселъ быстро наталкиваютъ дѣтей, что обратить можно въ шестыя. Если кто-нибудь изъ учениковъ станетъ втупикъ, то для наведенія достаточно перебрать: въ какія доли раздробляется половина? то же самое продѣлать и съ третью. Это быстрое перебираніе и тѣмъ болѣе быстрое, чѣмъ устный счетъ стоитъ въ школѣ выше, помогаетъ во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, сперва для знаменателей не выше десяти, потомъ въ предѣлѣ ста, и наконецъ, пожалуй, тысячи, особенно для чиселъ болѣе употребительныхъ. Напр. $^{11}/_{15}$ и $^3/_4$ въ какія одинаковыя доли можно раздробить? Быстро идетъ догадка, что пятнадцатыя раздробляются въ тридцатыя, сорокъпятыя, шестидесятыя. Какія же изъ нихъ годятся для обращенія четвертыхъ? Только шестидесятыя. Почему? Потому что число 60 дѣлится на 4. Не будетъ никакой ошибки, если укажутъ стодвадцатыя.

Чтобы не затруднять дѣтей излишнимъ вычисленіемъ, умѣстнѣе давать въ началѣ не дроби вообще, а только доли съ маленькими знаменателями, въ родѣ $^1/_3$ и $^1/_4$, $^1/_2$ и $^1/_5$, $^1/_2$ и $^1/_7$, $^1/_3$ и $^1/_5$, $^1/_4$ и $^1/_7$, $^1/_2$ и $^1/_9$. Въ этихъ дробяхъ наглядность можетъ послужить для наведенія, для исправленія ошибокъ и для провѣрки отвѣтовъ. На упражненіяхъ съ подобными дробями учащіеся постигаютъ сами, что общій знаменатель легко найдется, если перемножить данныхъ знаменателей. И это правило опять-таки учитель пусть не спѣшитъ давать въ готовой формѣ; неизмѣримо больше пользы, когда учащимся оно представится само собою.

§ 21. Третій случай. Послѣдній видъ примѣровъ имѣетъ ту особенность, что общій знаменатель находится, пожалуй, и перемноженіемъ, но въ этомъ случаѣ онъ не бываетъ наименьшимъ. Примѣръ такой: $^1/_8$ и $^1/_6$. Перемноженіемъ опредѣляется число 48, наименьшій же знаменатель равенъ 24. Способъ перемноженія нельзя отвергать и въ подобныхъ примѣрахъ, тѣмъ болѣе, если онъ уже достаточно опредѣлился для дѣтей изъ примѣровъ 2-го случая, но, допустивши этотъ способъ, надо указать на то, что знаменатель въ этомъ случаѣ можетъ получиться и меньшій и что съ меньшимъ знаменателемъ вычисленія вести удобнѣе, чѣмъ съ большимъ.

Правила для этого случая вывести никакого нельзя, такъ какъ

для правила нужно знать числа первоначальныя и составныя и разложеніе на первоначальныхъ множителей. Поэтому, если ученики не въ силахъ находить наименьшаго знаменателя при помощи догадки и знанія устнаго счета, то лучше предоставить имъ находить знаменателя перемноженіемъ и оставить подробности до V года.

При приведеніи дробей къ одному знаменателю много помогаетъ аналогія съ именованными числами, напр. она выясняетъ вопросъ, почему обыкновенно приводятъ къ общему наименьшему знаменателю, а не къ какому угодно. Потому что какъ въ именованныхъ числахъ стараются выражать мелкія мѣры въ крупныхъ, такъ и въ дробяхъ стараются мелкія доли обращать въ крупныя и вообще пользуются болѣе крупными долями.

Сложеніе и вычитаніе простыхъ дробей.

§ 22. **Совмѣстное изученіе сложенія и вычитанія.** Два дѣйствія, сложеніе и вычитаніе, мы проходимъ совмѣстно потому, что правила ихъ совершенно одинаковы и нѣтъ нужды тратить лишнее время на то, чтобы проходить эти дѣйствія отдѣльно. Кромѣ того, когда они проходятся вмѣстѣ, то больше пользы бываетъ для задачъ, потому что два дѣйствія можно въ задачахъ чередовать и вводить въ одну задачу.

§ 23. **Объясненіе сложенія и вычитанія.** Оно не составляетъ никакого труда, если только усвоено приведеніе дробей къ одному знаменателю. Дѣйствительно, ничего новаго въ этихъ дѣйствіяхъ нѣтъ и ничего такого, что не встрѣчалось бы ранѣе. Поэтому мы не считаемъ нужнымъ строго разграничивать случаи, гдѣ дѣйствіе идетъ безъ раздробленія или превращенія, отъ тѣхъ, гдѣ требуются эти преобразованія. Столько разъ ученики касались этого вопроса и столько разъ онъ разъяснялся, что теперь, кромѣ простого повторенія, не требуется ничего. Однимъ словомъ, сложеніе и вычитаніе дробей можетъ быть разучено на самостоятельныхъ работахъ, и помощь учителя въ предварительныхъ объясненіяхъ скорѣе принесетъ вредъ, чѣмъ пользу, такъ какъ отниметъ отъ учащихся посильную для ихъ мышленія работу.

Въ случаѣ, если ученики будутъ не особенно понятливы и потребуется строгая постепенность въ расположеніи примѣровъ, то, разумѣется, сперва надо брать тѣ случаи, гдѣ дроби имѣютъ одинаковыхъ знаменателей, а потомъ уже слѣдуетъ обратиться къ дро-

бямъ съ разными знаменателями. Точно также сперва рѣшаются тѣ примѣры, гдѣ нѣтъ побочныхъ осложненій, въ родѣ превращенія въ цѣлыя числа и заниманія единицы. На необходимость приводить дроби къ одному знаменателю можно навести легкими примѣрами, въ родѣ $1/2 + 1/8$, рѣшаемыми наглядно, а также тѣмъ указаніемъ, что и въ именованныхъ числахъ, если складываютъ разныя мѣры, то только или отмѣчаютъ сложеніе, или же обращаютъ слагаемыя въ одинаковыя мѣры. Напр. 4 п. + 7 ф. запишется или въ видѣ 4 п. 7 ф. или же въ видѣ 167 ф., но никакъ нельзя считать за отвѣтъ 11, тѣмъ болѣе, что нельзя опредѣлить, чего именно 11, пудовъ или фунтовъ.

Ученики, которыхъ ведутъ все время на отвлеченной работѣ, не давая имъ ясныхъ конкретныхъ представленій, могутъ допустить въ сложеніи такую грубую ошибку: сложить числителя съ числителемъ, а знаменателя со знаменателемъ. Сердиться на учениковъ за такой промахъ нельзя: здѣсь вина учителя, а не учениковъ. Чтобы исправить ошибку, надо устранить то, что привело къ ошибкѣ, т.-е. отсутствіе наглядныхъ объясненій и практики съ употребительными долями (половиной, четвертью, восьмой).

§ 24. Письменное расположеніе дѣйствія. Ученики, которые слишкомъ привыкли къ тому, что имъ даютъ готовые образцы вычисленій, нуждаются и въ дробяхъ въ такихъ образцахъ. Если же дѣтямъ предоставляли самостоятельность въ расположеніи вычисленій, то они и въ этомъ случаѣ найдутъ удобный порядокъ письменнаго вычисленія. Но во всякомъ случаѣ учитель въ правѣ требовать, чтобы запись отличалась полнотой и точностью. Неполнота можетъ обнаружиться въ томъ, что ученики пропустятъ въ вычисленіи или цѣлыя числа или дроби и ограничатся чѣмъ-нибудь однимъ: это уже поведетъ къ ошибкамъ. Неточность же бываетъ тогда, когда ученики подразумѣваютъ одно, а пишутъ другое. Напр., $3^1/_7 + 2^3/_4$, они на время откинутъ цѣлыя числа, пока приводятъ къ одному знаменателю, и у нихъ получается совершенно невѣрное равенство: $3^1/_7 + 2^3/_4 = {}^4/_{28} + {}^{21}/_{28} = {}^{25}/_{28} = 5^{25}/_{28}$, въ которомъ среднія части гораздо меньше крайнихъ. Лучшая форма записыванія можетъ быть взята такая: $3^1/_7 + 2^3/_4 = 3^4/_{28} + 2^{21}/_{28} = 5^{25}/_{28}$. Можно принять и такой порядокъ, при которомъ цѣлыя числа складываются отдѣльно, а дроби отдѣльно и затѣмъ обѣ суммы соединяются, напр., $3 + 2 = 5$, $1/7 + 3/4 = \frac{4 + 21}{28} = {}^{25}/_{28}$, всего $5^{25}/_{28}$.

Умноженіе и дѣленіе дробнаго числа на цѣлое.

§ 25. Въ какомъ порядкѣ проходить умноженіе и дѣленіе дробей. Во многихъ учебникахъ ариѳметики умноженіе и дѣленіе дробей распредѣлено по разнымъ отдѣламъ. Наприм., въ самомъ началѣ курса дробей помѣщается увеличеніе и уменьшеніе дробей. Но вѣдь что такое увеличеніе дроби, какъ не умноженіе ея на цѣлое и что такое уменьшеніе дроби, какъ не дѣленіе ея на цѣлое? Точно также нѣтъ никакого основанія помѣщать передъ сложеніемъ дробей нахожденіе частей числа и опредѣленіе цѣлаго числа по даннымъ частямъ. Дальше мы выяснимъ, что умноженіе на дробь и есть нахожденіе части числа, и дѣленіе на дробь представляетъ собой опредѣленіе цѣлаго числа по данной части. — Благодаря такой разбросанности отдѣловъ, да кстати нѣкоторой запутанности объясненій, у дѣтей не можетъ получиться, въ большинствѣ случаевъ, правильнаго понятія объ умноженіи и дѣленіи дробей. Мы, съ своей стороны, собираемъ всѣ отдѣльныя статьи вмѣстѣ и проводимъ въ нихъ одинъ опредѣленный взглядъ на эти дѣйствія.

Два простѣйшихъ вопроса, умноженіе и дѣленіе дробнаго числа на цѣлое, мы ставимъ рядомъ по слѣдующей причинѣ. Дѣленіе на цѣлое число должно предшествовать умноженію на дробь, такъ какъ умножить на дробь значитъ найти часть числа, а нахожденіе доли числа требуетъ дѣленія на знаменателя; напр. $^3/_8 \times {}^1/_4$, это значитъ найти четвертую часть дроби $^3/_8$; чтобы найти четвертую часть, стоитъ только $^3/_8$ раздѣлить на четыре, будетъ $^3/_{32}$.

Изъ этого видно, что нельзя вполнѣ отдѣлить умноженіе дробей отъ дѣленія и пройти сперва всѣ случаи умноженія, а потомъ уже всѣ случаи дѣленія: тогда нельзя будетъ точно объяснить 2-го отдѣла умноженія, такъ какъ онъ требуетъ для себя предварительнаго изученія перваго отдѣла дѣленія.

Итакъ, мы совѣтуемъ пройти умноженіе и дѣленіе дробей въ слѣдующемъ порядкѣ: a. умноженіе и дѣленіе дробныхъ чиселъ на цѣлыя, b. умноженіе и дѣленіе на дробныя числа.

§ 26. Умноженіе дроби на цѣлое число. Выводъ правила въ этомъ случаѣ, какъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, лучше всего предоставить самимъ ученикамъ, сообщая имъ лишь подходящіе примѣры съ употребительными долями, въ родѣ половинъ, четвертей, восьмушекъ, третьихъ и пятыхъ долей. Относящаяся сюда задача, напр., „сколько надо раздать вамъ бумаги, если каж-

дому ученику дать по $^1/_2$ листа?" (положимъ въ группѣ 9 учениковъ) приводится къ тому, что $^1/_2$ взять 9 разъ, получится $^9/_2$, или, послѣ превращенія въ цѣлыя единицы, $4^1/_2$. Ученики могутъ предложить еще нѣсколько примѣровъ на это дѣйствіе и тогда только учитель пусть спроситъ у нихъ выводъ, который выразится такъ, что чтобы умножить дробь на какое-нибудь цѣлое число, достаточно умножить числителя на это число.

Другое правило умноженія „чтобы умножить дробь на цѣлое число, можно знаменателя этой дроби раздѣлить на цѣлое число, если только онъ дѣлится" не такъ скоро выясняется дѣтямъ, потому что оно не вытекаетъ изъ основного дѣйствія, изъ котораго выходитъ умноженіе, т.-е. изъ сложенія; дѣленіе знаменателя можно вывести или изъ ряда примѣровъ, гдѣ послѣ умноженія производится сокращеніе ($^3/_4 \times 2$, $^5/_8 \times 2$, $^7/_{10} \times 2$), или же путемъ умноженія долей, въ которыхъ знаменатель является кратнымъ числомъ множителя: $^1/_{10} \times 5$, $^1/_{12} \times 6$, $^1/_{18} \times 9$. Во всякомъ случаѣ на первое время лучше довольствоваться правиломъ умноженія числителя, считая это правило за основное, а правило дѣленія знаменателя пока лучше считать частнымъ и предоставить находчивости учениковъ въ тѣхъ примѣрахъ, гдѣ удобно, его примѣнять.

Умноженіе цѣлаго числа съ дробью на цѣлое можно совершать двояко: или раздробляя цѣлое число въ доли или отдѣльно умножая цѣлое и дробь и потомъ складывая. И тотъ и другой пріемъ доступны, но второй болѣе вытекаетъ изъ свѣдѣній, преподанныхъ ученикамъ въ первые три года. Тамъ не разъ приходилось умножать многозначное число на однозначное, при этомъ каждый разрядъ умножался отдѣльно и всѣ произведенія складывались; то же случалось съ составными именованными числами, въ которыхъ помножались мѣры каждаго наименованія отдѣльно. Поэтому-то и въ дробяхъ естественнѣе будетъ помножать отдѣльно цѣлое число и отдѣльно дробь и потомъ оба произведенія складывать. Второй же способъ удобенъ развѣ тогда, когда знаменатель сокращается съ множителемъ.

§ 27. Дѣленіе дроби на цѣлое число. Случай дѣленія на части, какъ болѣе доступный дѣтямъ по своей сущности, надо признать болѣе удобнымъ для первоначальныхъ объясненій. Что касается выбора примѣровъ на дѣленіе, то во главѣ надо поставить тѣ, гдѣ числитель дѣлится безъ остатка на цѣлое число: это будутъ самые простые, такъ какъ въ нихъ дѣленіе не сопровождается раздробленіемъ; такъ $^8/_{13} : 4 = {^2/_{13}}$ по той же причинѣ, по какой и 8

какихъ угодно мѣръ или единицъ, при дѣленіи на 4 равныя части, даютъ въ каждой части по 2 мѣры или единицы. Болѣе затрудненій можетъ представиться тогда, когда числитель не содержитъ въ себѣ дѣлителя цѣлое число разъ и поэтому является необходимость въ побочномъ процессѣ — раздробленіи. Если руководствоваться строгой постепенностью — а это необходимо для не особенно бойкихъ дѣтей — то сперва надо взять для примѣра доли, въ родѣ $^1/_3 : 2$, $^1/_5 : 7$, $^1/_4 : 5$. Послѣдній примѣръ объясняется такъ. Раздробить $^1/_4$ въ двадцатыя доли; въ единицѣ 20 двадцатыхъ, а въ $^1/_4$ вчетверо менѣе, т.-е. $20 : 4 = 5$; теперь $^5/_{20}$ раздѣлить на 5, будетъ $^1/_{20}$, это и есть отвѣтъ.

Какой же изъ пріемовъ считать нормальнымъ: дѣленіе числителя или умноженіе знаменателя? Очевидно второй, такъ какъ первый при всей своей легкости и естественности не обладаетъ необходимой общностью, такъ какъ примѣняется не ко всѣмъ дробямъ, а только къ такимъ, въ которыхъ числитель содержитъ дѣлителя цѣлое число разъ. Поэтому нормальнымъ пріемомъ надо считать тотъ, когда при дѣленіи дроби на цѣлое число знаменатель дѣлимой дроби множится на дѣлителя.

§ 28. Дѣленіе по содержанію. Въ предыдущемъ § подразумѣвалось дѣленіе на части, или уменьшеніе числа въ нѣсколько разъ; въ немъ дѣлимое могло быть именованнымъ числомъ, дѣлитель же былъ обязательно отвлеченнымъ числомъ, частное — одного рода съ дѣлимымъ. Теперь вникнемъ въ вопросъ: каковъ смыслъ дѣленія по содержанію въ этомъ случаѣ? (т.-е. когда дѣлимое и дѣлитель однородны, а частное является отвлеченнымъ числомъ). Напр., какъ истолковать дѣйствіе — $^2/_3$ рубля : 4 рубля? Содержаться 4 рубля въ $^2/_3$ не могутъ ни одного цѣлаго раза, такъ какъ $^2/_3$ гораздо меньше 4-хъ, но 4 рубля могутъ содержаться въ $^2/_3$ рубля долю раза, иначе сказать какая-то доля 4-хъ рублей составляетъ $^2/_3$ рубля. Какая же доля 4-хъ рублей составляетъ $^2/_3$ рубля? Чтобы на это отвѣтить, сперва рѣшимъ такой вопросъ: какую долю одного рубля составляютъ $^2/_3$ рубля? Очевидно, $^2/_3$. Долю же четырехъ рублей онѣ составляютъ вчетверо меньшую, т.-е. $^2/_{12}$, или $^1/_6$. Изъ этого видно, что дѣйствіе $^2/_3$ руб. : 4 р. $= ^1/_6$ показываетъ, что $^2/_3$ рубля составляютъ $^1/_6$ отъ 4 руб., иначе сказать въ $^2/_3$ рубля 4 рубля не содержатся ни одного цѣлаго раза и лишь $^1/_6$ 4 рублей составляетъ $^2/_3$ руб. Точно также $2^1/_2$ п. : 5 п. $= ^1/_2$ показываетъ, что $2^1/_2$ п. составляютъ $^1/_2$ пяти пудовъ, иначе сказать 5 пудовъ

содержатся въ $2^{1}/_{2}$ п. полъ-раза. Обратно, если задаютъ вопросъ, какую часть дробь составляетъ отъ цѣлаго числа, то этотъ вопросъ рѣшается дѣленіемъ дроби на цѣлое число. Примѣръ: $^{2}/_{3}$ фун. составляютъ какую часть пуда? Дѣлимъ $^{2}/_{3}$ на 40, получится $^{2}/_{120}$, т.-е. $^{1}/_{60}$.

Всю настоящую замѣтку мы пишемъ болѣе для учителя, чѣмъ для учениковъ. Мы желаемъ истолковать оба случая дѣленія, но считаемъ дѣленіе по содержанію пока труднымъ для учениковъ и совѣтовали бы отложить его до слѣдующаго года, когда основныя понятія можно будетъ считать укоренившимися и дана будетъ возможность углубиться въ разработку болѣе тонкихъ свойствъ. На успѣхъ можно надѣяться скорѣе въ случаѣ смѣшанныхъ чиселъ, когда дѣлимое можно взять больше дѣлителя и слѣдов. терминъ „содержится" можно считать примѣнимымъ. Такъ, произвести дѣленіе $12^{1}/_{2}$ арш. : 5 арш. значитъ узнать, сколько разъ 5 арш. содержатся въ $12^{1}/_{2}$ арш. Для этого вспоминаемъ, что въ именованныхъ числахъ, когда дѣлимое и дѣлитель выражались въ разныхъ мѣрахъ, то предварительно обращали ихъ въ одинаковыя мѣры; такъ и здѣсь: дѣлимое выражено въ половинахъ, а дѣлитель въ цѣлыхъ единицахъ, то нужно раздробить обѣ величины въ одинаковыя доли — въ половины, и получимъ $^{25}/_{2} : ^{10}/_{2}$. Сколько же разъ 10 половинъ содержатся въ 25 половинахъ? $2^{5}/_{10}$ раза, т.-е. $2^{1}/_{2}$ раза. Здѣсь 25 дѣлимъ на 10, а знаменателей отбрасываемъ на томъ основаніи, что терминъ „половина" принимаемъ за наименованіе и приравниваемъ нашъ вопросъ къ такимъ: „сколько разъ 10 полтинниковъ содержатся въ 25 полтинникахъ?" или „сколько разъ 10 грошей содержатся въ 25 грошахъ?"

Умноженіе и дѣленіе на дробь.

§ 29. Что значитъ умножить на дробь. Опредѣленіе того, что значитъ умножить на дробь, принадлежитъ къ числу трудныхъ и въ то же время очень важныхъ опредѣленій. Трудность его зависитъ не столько отъ него самого, сколько отъ того освѣщенія, которое придается этому вопросу въ учебникахъ ариѳметики. Тамъ пользуются такимъ опредѣленіемъ: помножить одно число на другое значитъ изъ множимаго составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Ничего нельзя возразить противъ истинности этого положенія, но, если собрать всѣ тяготы и трудности, съ которыми дѣти усвоиваютъ его, и

сообразить, что большинство учениковъ просто разучиваютъ это опредѣленіе, не вполнѣ его понимая, то всякій здравомыслящій педагогъ согласится, что оно неумѣстно, по крайней мѣрѣ, для приготовительнаго курса дробей. Вся бѣда въ томъ, что предыдущая работа надъ умноженіемъ цѣлыхъ отвлеченныхъ и именованныхъ чиселъ нисколько не подготовляетъ къ этому опредѣленію и оно не является выводомъ, само собой вытекающимъ изъ массы примѣровъ, а наоборотъ въ нужный моментъ какъ-будто сваливается съ неба, имъ пользуются короткое время, пока идетъ выводъ правила, и потомъ оно опять укладывается наглухо въ сундукъ, какъ зимнія вещи укладываютъ до слѣдующаго сезона. Намъ надо составить такое опредѣленіе, которое служило бы результатомъ умственной дѣятельности учениковъ, являлось бы выводомъ ихъ обобщающаго мышленія, а не преподносилось учителемъ къ извѣстному моменту.

Чтобы получить правильное обобщеніе, сдѣлаемъ обзоръ умноженія съ первыхъ ступеней. Что значитъ умножить на цѣлое число, напр., на 5? Значитъ взять множимое 5 разъ, или повторить его слагаемымъ 5 разъ, или найти сумму 5 такихъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно множимому. Напр., если дана задача „сколько стоятъ 5 фунтовъ сахару по 16 коп. за фунтъ“, то для рѣшенія ея множимъ 16 на 5, потому что стоимость одного фунта, именно 16 коп., мы должны взять столько разъ, сколько фунтовъ, т.-е. 5 разъ.

Если бы въ предыдущей задачѣ дано было не 5 фунт., а $5^3/_4$, то и стоимость фунта, т.-е. 16 коп., пришлось бы повторить $5^3/_4$ раза и дѣйствіе представилось бы такъ: $16 \times 5^3/_4$. Къ смѣшаннымъ числамъ легко примѣнить то же самое опредѣленіе, какое дается для умноженія цѣлыхъ чиселъ, и оно-то позволяетъ намъ распространить обобщеніе и на дроби.

Задача „фунтъ сахару стоитъ 16 коп., сколько стоятъ $^3/_4$ фунта“ рѣшается учениками безъ особыхъ усилій, такъ какъ не выходитъ изъ круга свѣдѣній, сообщенныхъ имъ. Они узнаютъ сперва стоимость $^1/_4$ фунта, получается 4 коп., потомъ стоимость $^3/_4$ фунта, она составитъ 12 коп. Весь вопросъ теперь въ томъ, какъ записать то дѣйствіе, которое привело къ отвѣту 12. Здѣсь учитель напоминаетъ, что, когда узнавали стоимость 5 фунт., то 16 брали 5 разъ; когда узнавали стоимость $5^3/_4$ фунт., то брали $5^3/_4$ раза; слѣд. вообще, когда узнается стоимость нѣсколькихъ фунтовъ, то цѣна фунта, 16 коп., множится на число фунтовъ, поэтому и

въ послѣднемъ случаѣ надо 16 умножить на три четверти, или 16 взять $^3/_4$ раза. Что же значитъ взять $^3/_4$ раза? Это то же самое, что $^1/_4$ числа взять 3 раза, или найти три четверти числа. Такимъ образомъ, умножить на дробь значитъ взять множимое долю раза (или нѣсколько долей раза), иначе сказать, взять такую часть множимаго, какая указывается дробью множителя.

Примѣры: а) Умножить 2 пуда на $^1/_2$ значитъ взять 2 пуда не 5 разъ и не 7 разъ, а $^1/_2$ раза; если 2 пуда взять 1 разъ, то будетъ 2 пуда, если же взять $^1/_2$ раза, то будетъ $^1/_2$ двухъ пудовъ, т.-е. 1 пудъ, слѣдов. 2 п. $\times$ $^1/_2$ = 1 п. ѣ) Умножить 3 часа на $^5/_6$ значитъ взять 3 часа не полный разъ, а часть раза, т.-е. взять $^5/_6$ трехъ часовъ, будетъ $2^1/_2$.

Такимъ образомъ, общее опредѣленіе умноженія, которое примѣнимо и для цѣлыхъ и для дробныхъ чиселъ, мы даемъ такое: „умножить одно число на другое значитъ взять первое число столько разъ, чему равно второе число“. Это опредѣленіе доступно дѣтямъ, такъ какъ прямо вытекаетъ изъ всѣхъ тѣхъ умноженій, которыя встрѣчаются какъ въ цѣлыхъ, такъ и въ дробныхъ числахъ.

§ 30. Умноженіе цѣлаго числа на дробь. Для первыхъ примѣровъ, т.-е. для вывода хода этого дѣйствія, удобнѣе всего брать такія задачи, гдѣ бы требовалось цѣлое число помножить на смѣшанное; тогда виднѣе будетъ сущность дѣйствія, именно „умножить значитъ взять“. Беремъ, напримѣръ, такую задачу „ск. я пройду въ $3^3/_4$ часа, если въ часъ буду проходить по 6 верстъ?“ Прежде всего и главнѣе всего заботимся о томъ, что бы указать дѣйствіе, какимъ рѣшается задача: для рѣшенія необходимо 6 верстъ взять $3^3/_4$ раза; запишется это такъ — 6 $\times$ $3^3/_4$. Послѣ того, какъ дѣйствіе указано, приступаемъ къ его производству и вычисляемъ такъ: въ три часа я пройду 18 верстъ, въ $^1/_4$ часа $1^1/_2$ версты, въ $^3/_4$ часа $4^1/_2$ верс., всего въ $3^3/_4$ $22^1/_2$ версты. Сколько же отдѣльныхъ вычисленій пришлось намъ сдѣлать, чтобы 6 взять $3^3/_4$ раза? Во-первыхъ, мы взяли 6 три раза, чтобы узнать разстояніе, пройденное въ 3 часа. Затѣмъ мы 6 раздѣлили на 4, чтобы узнать разстояніе, пройденное въ $^1/_4$ часа. Потомъ мы $1^1/_2$ взяли 3 раза; найденный отвѣтъ $4^1/_2$ версты равенъ разстоянію, пройденному въ $^3/_4$ часа. Наконецъ, мы сложили 18 съ $4^1/_2$ и получили искомый результатъ $22^1/_2$. Всего намъ пришлось выполнить 4 дѣйствія: умноженіе, дѣленіе, умноженіе и сложеніе. И всѣ эти дѣйствія составляютъ одно общее умноженіе 6 на $3^3/_4$. Учащихся не

должно удивлять, что для умноженія на дробное число требуется столько отдѣльныхъ дѣйствій: подобные случаи у нихъ встрѣчались уже въ цѣлыхъ отвлеченныхъ числахъ; тамъ при умноженіи многозначныхъ чиселъ производилось столько отдѣльныхъ умноженій, сколько разрядовъ во множителѣ, а въ концѣ было еще сложеніе частныхъ произведеній; въ дѣленіи многозначныхъ чиселъ вспомогательными дѣйствіями являлись умноженіе и вычитаніе, именно, когда дѣлитель умножался на разряды частнаго и полученное произведеніе вычиталось изъ дѣлимаго.

Послѣ выясненія умноженія на цѣлое число съ дробью, надо заняться умноженіемъ на дробь. Оно проще по вычисленію, но труднѣе по смыслу, т.-е. учащимся труднѣе установить, какое дѣйствіе требуется для рѣшенія вопроса. Напр., „сколько стоятъ $^3/_4$ арш. матеріи по 60 коп. за аршинъ?“ Самое важное — это установить, что для рѣшенія задачи надо употребить умноженіе 60 на $^3/_4$. Для этого приходится ссылаться, что въ случаѣ 3-хъ аршинъ, $3^1/_4$ арш. примѣняется умноженіе, и вообще при опредѣленіи стоимости купленнаго количества, то поэтому и здѣсь надо 60 умножить на $^3/_4$. Само вычисленіе не представитъ труда; оно состоитъ изъ дѣленія 60-ти на 4 и умноженія полученнаго числа на 3.

Наконецъ, послѣдними вопросами, очень легкими въ смыслѣ вычисленія и довольно трудными для указанія дѣйствія, являются тѣ, гдѣ цѣлое число умножается на долю. Напр., „если въ кускѣ 20 аршинъ, то сколько аршинъ въ $^1/_4$ куска?“. Дѣти быстро скажутъ, что 5, и скажутъ, что они раздѣлили 20 на 4. Отвѣтъ, въ сущности, правильный и его надо принять, но вмѣстѣ съ тѣмъ разъяснить, что намъ въ задачѣ дано не число 4, а дробь $^1/_4$, то какое же дѣйствіе надо произвести надъ 20 и $^1/_4$, чтобы получить 5. Вспоминая примѣры со смѣшанными числами и дробями, ученики приводятся къ заключенію по аналогіи (по сходству), что 20 надо взять $^1/_4$ раза.

Итакъ, изъ всѣхъ примѣровъ умноженія цѣлыхъ чиселъ на дробныя вытекаетъ, что умножить значитъ взять множимое столько разъ, чему равняется множитель. Съ этимъ опредѣленіемъ, усвоеннымъ на обильномъ количествѣ разнообразныхъ примѣровъ, можно перейти и къ болѣе трудному случаю, именно къ умноженію дроби на дробь.

Замѣтимъ, что при умноженіи цѣлаго числа на цѣлое съ дробью нѣтъ никакой выгоды обращать цѣлое съ дробью въ дробь. Безъ

обращенія дѣло идетъ правильно и естественно; такъ какъ при умноженіи всякихъ многозначныхъ чиселъ приходится умножать на каждый разрядъ множителя, то, по аналогіи, и здѣсь множимое отдѣльно умножается на цѣлое число и отдѣльно на дробь.

§ 31. Умноженіе дроби на дробь. Основанія для вывода порядка умноженія дроби на дробь теперь имѣются, такъ какъ при умноженіи цѣлаго числа на дробь этотъ порядокъ достаточно выяснился, тамъ было дано опредѣленіе дѣйствія и разработанъ его ходъ. Остается распространить усвоенное на примѣры, которые заключаютъ въ себѣ нѣсколько болѣе трудностей, такъ какъ въ нихъ не только множитель, но и множимое число дробное. Выясненіе лучше всего вести на самыхъ легкихъ дробяхъ, которыя не затрудняли бы своей сложностью и могли бы, при первой же необходимости, быть представлены наглядно. Напр., возьмемъ задачу: „сколько золотниковъ содержится въ $^1/_2$ грамма, если цѣлый граммъ равенъ $^1/_4$ золотника?“ Эта задача требуетъ умноженія, потому что въ ней надо величину грамма, т.-е. $^1/_4$ золотника, взять половину раза. Получается дѣйствіе $^1/_4 \times {}^1/_2$. Какъ его произвести? Ученики соображаютъ, что если бы $^1/_4$ взять одинъ разъ, то получилась бы $^1/_4$, а если $^1/_2$ раза, т.-е. взять половину $^1/_4$, то получится $^1/_8$, которая представляетъ собою половину четверти. Для наглядности можетъ служить кусочекъ мѣлу или воску, вѣсомъ въ $^1/_4$ золотника, его разрѣзаютъ пополамъ съ тѣмъ, чтобы взять его половину. Подобнымъ же образомъ разъясняется масса примѣровъ съ простѣйшими долями, въ родѣ „высчитать $^1/_2$ восьмушки листа бумаги, восьмушки (фунта) чаю“ и т. п., „найти, какую долю аршина составляетъ $^1/_3$ полъ-аршина, $^1/_3$ четверти аршина“ и проч. Если такихъ примѣровъ продѣлать достаточное количество и закрѣпить ихъ рѣшеніе на бѣгломъ устномъ счетѣ, то ученики сами сообразятъ, что при перемноженіи долей стоитъ только перемножить знаменателей, это и будетъ знаменателемъ искомой дроби.

На умноженіи долей надо остановиться продолжительное время, такъ какъ это очень удобный моментъ для того, чтобы ученики постигли сущность дѣйствія и его ходъ. Въ доляхъ и числа легкія и наглядность доступная. Послѣ того, какъ доли достаточно изучены, усложняемъ нѣсколько вопросъ и беремъ, напр., во множимомъ нѣсколько долей, т.-е. дробь: „фунтъ мѣди стоитъ $^{11}/_{20}$ рубля, сколько надо заплатить за $^1/_2$ фунта?“ Прежде всего точно указываемъ дѣйствіе: $^{11}/_{20}$ рубля надо взять $^1/_2$ раза, иначе сказать

взять $^1/_2$ числа $^{11}/_{20}$. Строка получается такая: $^{11}/_{20} \times {}^1/_2$. Половина одной двадцатой $= {}^1/_{40}$, а половина $^{11}/_{20} = {}^{11}/_{40}$. Затѣмъ идутъ подобные примѣры: $^7/_{20} \times {}^1/_2$, $^9/_{20} \times {}^1/_2$, $^3/_{20} \times {}^1/_2$. Изъ цѣлаго ряда примѣровъ ученики вполнѣ могутъ замѣтить, что знаменатель произведенія получается отъ перемноженія данныхъ знаменателей, а числитель произведенія отъ перемноженія данныхъ числителей. Чтобы представить этотъ выводъ въ ясной и опредѣленной формѣ, надо стараться подбирать такія дроби, чтобы онѣ при перемноженіи не давали поводовъ къ сокращенію, чтобы такимъ образомъ ни одинъ изъ производителей не ускользалъ отъ вниманія учениковъ.

Общій случай умноженія дроби на дробь идетъ въ самомъ концѣ, порядка же требуетъ того самого, какой данъ для разобранныхъ случаевъ. Напр., „сколько верстъ въ $^2/_3$ километра, если километръ равенъ $^{14}/_{15}$ версты?“ Надо $^{14}/_{15}$ взять $^2/_3$ раза, для этого возьмемъ сперва $^{14}/_{15}$ треть раза, т.-е. найдемъ $^1/_3$ числа $^{14}/_{15}$, получится $^{14}/_{45}$, потомъ узнаемъ, сколько составитъ не треть числа $^{14}/_{15}$, а 2 трети, надо $^{14}/_{45}$ взять 2 раза, будетъ $^{28}/_{45}$, это и есть отвѣтъ, такъ-что $^{14}/_{15} \times {}^2/_3 = \frac{28}{45}$. Какъ же получилось число 45? Отъ перемноженія 15 на 3. Какъ получилось число 28? Отъ умноженія 14 на 2. Слѣд., при перемноженіи дробей надо числителя помножить на числителя, а знаменателя на знаменателя.

Относительно умноженія смѣшанныхъ чиселъ надо замѣтить, что оно можетъ выполняться нѣсколькими способами, или съ обращеніемъ цѣлыхъ чиселъ въ дроби, или безъ обращенія. Если цѣлыя числа не обращать въ дроби, то вмѣсто одного дѣйствія придется производить нѣсколько, да кромѣ того результаты отдѣльныхъ дѣйствій нужно будетъ складывать, а для этого приводить ихъ къ одному знаменателю. Все это даетъ извѣстнаго рода неудобство, которое заставляетъ обыкновенно выбирать тотъ пріемъ, при которомъ множимое и множитель предварительно обращаются въ неправильныя дроби.

Разберемъ для примѣра умноженіе $3^1/_2$ на $2^3/_4$ безъ обращенія чиселъ въ неправильныя дроби. Чтобы число $3^1/_2$ взять $2^3/_4$ раза, возьмемъ его сперва 2 раза, будетъ 7; теперь намъ надо $3^1/_2$ взять $^3/_4$ раза, для этого мы опредѣлимъ сперва $^1/_4$ числа $3^1/_2$; $^1/_4$ числа $3 = {}^3/_4$, $^1/_4$ числа $^1/_2 = {}^1/_8$, всего $^7/_8$; дробь $^7/_8$ равняется $^1/_4$ $3^1/_2$, а намъ требуется найти $^3/_4$; въ такомъ случаѣ получится $^{21}/_8$,

т.-е. $2^5/_8$. Весь искомый отвѣтъ состоитъ изъ $7+2^5/_8=9^5/_8$, Ровно столько же у насъ было бы, если бы обратили $3^1/_2$ и $2^3/_4$ въ неправильныя дроби и помножили $^7/_2$ на $^{11}/_4$.

§ 32. Перестановка производителей. Свойство произведенія по которому оно не измѣняетъ своей величины при перестановкѣ множителей, довольно извѣстно ученикамъ еще изъ курса цѣлыхъ чиселъ. Теперь представляется возможность распространить его и на дроби. Этимъ дано будетъ не мало матеріала для упражненій въ умноженіи дробей. Дѣти видятъ, что $^1/_2\times{}^1/_3={}^1/_3\times{}^1/_2$, $^3/_4\times4=4\times{}^3/_4$ и т. п. Изъ всего этого они получаютъ выводъ, полезный какъ для теоріи, такъ и для практики.

§ 33. Что значитъ раздѣлить на дробь. Дѣленіе имѣетъ два вида, дѣленіе на части и дѣленіе по содержанію, и они приложимы въ случаѣ дробей. Когда цѣлое число дѣлится на дробь, то смыслъ этого дѣйствія въ случаѣ дѣленія по содержанію довольно ясенъ: раздѣлить въ этомъ случаѣ значитъ узнать, сколько разъ меньшее число содержится въ большемъ — это тогда, когда дѣлимое больше дѣлителя, — или же узнать, какую часть дѣлимое составляетъ отъ дѣлителя, если дѣлителемъ является смѣшанное число, которое больше дѣлимаго. Оба эти значенія можно объединить въ одномъ первомъ, если принять во вниманіе, что и во второмъ случаѣ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, но только не цѣлый разъ, такъ какъ онъ больше дѣлимаго, а долю раза.

Дѣленіе на части истолковывается нѣсколько труднѣе, чѣмъ дѣленіе по содержанію. Для объясненія мы возьмемъ, какъ брали раньше при умноженіи цѣлаго числа на дробь, въ дѣлителѣ не правильную дробь, а цѣлое число съ дробью.

Возьмемъ, напр., задачу: „за $2^1/_2$ дня плотникъ получилъ 4 рубля; сколько ему приходится за день?“ Если бы эти 4 руб. были уплачены за 3 дня, или за 4, или за 5 и т. д., то, чтобы узнать поденную плату, мы употребили бы дѣленіе, именно всю заработанную плату раздѣлили бы на число дней. Такъ и въ этомъ случаѣ, надо 4 рубля раздѣлить на $2^1/_2$, полученный отвѣтъ $1^3/_5$ будетъ показывать, сколько платы приходится на 1 день, или на 1 единицу, или на 1 часть, если въ 4 рубляхъ такихъ частей заключается $2^1/_2$. Такимъ образомъ дѣленіемъ мы узнаемъ: сколько приходится на 1 изъ столькихъ частей дѣлимаго, сколько единицъ имѣется въ дѣлителѣ. Это опредѣленіе взято изъ примѣровъ, въ которыхъ дѣлимое и дѣлитель цѣлыя числа, и распространено на случай, гдѣ дѣлителемъ служитъ цѣлое

число съ дробью. Это же опредѣленіе вполнѣ возможно принять и для тѣхъ вопросовъ, гдѣ дѣлителемъ является правильная дробь. Напр., въ задачѣ „въ $^3/_4$ часа машина сжигаетъ 10 пуд. угля; сколько она сжигаетъ въ часъ?“ мы дѣлимъ 10 пуд. на $^3/_4$ и этимъ узнаемъ величину 1 такой части, $^3/_4$ которой находится въ дѣлителѣ; мы дѣлимъ, слѣд., не на 2 части, не на 3, на 4, на 10, $10^1/_4$, а на $^3/_4$ части, узнаемъ же попрежнему величину одной части или одной такой единицы, $^3/_4$ которой составляютъ 10 пуд., или, наконецъ, опредѣляемъ величину 1 такого числа, $^3/_4$ котораго составляютъ 10 пуд. Такимъ образомъ вотъ какое опредѣленіе можно дать для всякаго дѣленія на части, т.-е. для всякаго дѣлителя: дѣленіемъ мы узнаемъ величину каждой изъ столькихъ частей, сколько ихъ въ дѣлителѣ; при этомъ безразлично, имѣется ли въ дѣлителѣ нѣсколько частей или же неполная часть.

Для дѣтей всѣ предыдущія объясненія надо передать въ такой формѣ, которая являлась бы доступной для ихъ пониманія. Для этого надо брать задачи съ конкретнымъ содержаніемъ, допускающія наглядное представленіе, и чтобы вычисленія этихъ задачъ были какъ можно легче, тогда на эти вычисленія не будетъ расходоваться энергія дѣтей. Задачу надо сперва строить на цѣлыхъ числахъ, такъ какъ съ цѣлыми числами дѣти уже изучали случаи дѣйствій и такимъ образомъ удовлетворяется педагогическое правило „переходить отъ извѣстнаго къ неизвѣстному“. Возьмемъ, напр., для разбора такую задачу: „4 палочки сургуча стоятъ 12 коп.; сколько стоитъ 1 палочка?“. Изъ этой задачи выводимъ слѣдствіе, что стоимость одной штуки находится дѣленіемъ всей стоимости на число штукъ. Слѣдующая задача „за $1^1/_2$ палочки отдали 6 коп., ск. надо отдать за одну?“ рѣшается опять дѣленіемъ 6 коп. на $1^1/_2$ и опять подтверждаетъ правило, что стоимость одной штуки опредѣляется дѣленіемъ всей стоимости на число штукъ. Теперь остается, наконецъ, примѣнить это правило къ послѣднему случаю, когда дѣлителемъ является дробь: „если $^3/_4$ палочки стоятъ 3 копейки, то сколько по этому расчету надо отдать за цѣлую?“ Здѣсь, согласно выведенному обобщенію, надо всю стоимость, т.-е. 3 коп., раздѣлить на число штукъ, т.-е. на $^3/_4$ *).

---

*) Замѣтимъ, что дѣленіе на дробь не легко уясняется дѣтямъ, какъ видъ дѣленія. Поэтому, если приведенныя выше объясненія окажутся затруднительными, возможно замѣнить въ этомъ году дѣленіе на дробь нахожденіемъ цѣлаго по части, состоящимъ изъ 2-дѣйствій: дѣленія и умноженія.

Изъ нѣсколькихъ подобныхъ задачъ и вытекаетъ для учащихся выводъ, что дѣленіемъ на дробь мы узнаемъ цѣну или величину единицы или штуки, когда дана цѣна или величина нѣсколькихъ единицъ или штукъ, при чемъ количество ихъ можетъ быть выражено или цѣлымъ числомъ или цѣлымъ числомъ съ дробью или наконецъ дробью.

§ 34. Дѣленіе цѣлаго числа на дробь. Если дробь разсматривать какъ именованное число, въ которомъ числитель показываетъ количество единицъ, или мѣръ, а знаменатель ихъ наименованіе (напр,, $^2/_3=2$ трети, какъ 2 пуда, 2 часа и т. п.), то дѣленіе цѣлаго числа на дробь приводится къ дѣленію именованнаго числа на именованное и, слѣд., объяснить его лучше всего при помощи дѣленія по содержанію, по крайней мѣрѣ сперва, а потомъ уже и при помощи дѣленія на части. Для этого, согласно § 28, учитель припоминаетъ съ дѣтьми, что когда дѣлится именованное число на именованное, то обращаются эти числа предварительно въ одинаковыя мѣры: такъ и здѣсь, чтобы узнать, сколько разъ дробь содержится въ цѣломъ числѣ, обращаемъ ихъ въ одинаковыя доли и дѣлимъ, напр., $4:{}^2/_3=\frac{12}{3}:{}^2/_3=6$, такъ какъ 2 доли содержатся въ 12 такихъ же доляхъ 6 разъ.

Что для дѣленія по содержанію надо дѣлимое и дѣлителя выразить въ одинаковыхъ доляхъ и потомъ уже производить дѣйствіе, это объяснить можно и при помощи послѣдовательнаго вычитанія. Такъ въ предыдущемъ вопросѣ $4:{}^2/_3$ отнимаемъ послѣдовательно отъ 4-хъ по $^2/_3$, чтобы узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержатся въ 4-хъ; при этомъ, чтобы отнять первый разъ, мы единицу раздробляемъ въ третьи доли, будетъ $3^3/_3-{}^2/_3=3^1/_3$; чтобы отнять второй разъ, намъ надо опять раздробить въ третьи доли, получится $2^4/_3-{}^2/_3=2^2/_3$; затѣмъ далѣе получится $2^2/_3-{}^2/_3=2$, $1^3/_3-$ $-{}^2/_3=1^1/_3$, $^4/_3-{}^2/_3={}^2/_3$, $^2/_3-{}^2/_3=0$; всего намъ пришлось $^2/_3$ отнимать отъ 4 шесть разъ и каждое отниманіе требовало присутствія третьихъ долей въ уменьшаемомъ. Слѣд., чтобы узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержатся въ 4-хъ, намъ пришлось перевести постепенно всѣ 4 единицы въ третьи доли.

Чтобы объяснить случай дѣленія на части, беремъ для примѣра такую задачу: „за $3^1/_2$ дести бумаги заплачено 49 коп.; сколько стоитъ десть?“ Для рѣшенія задачи надо произвести дѣленіе 49 на $3^1/_2$, поэтому прежде всего отмѣчаемъ формулу дѣйствія: $49:3^1/_2=$.

Какъ же раздѣлить 49 на $3^1/_2$? Иначе сказать, какъ узнать стоимость одной дести? Конечно, можно узнать это подборомъ чиселъ, т.-е., если задаваться какимъ-нибудь числомъ, помножать его на $3^1/_2$ и сравнивать съ даннымъ числомъ 49. Если взять 16 коп., то $16 \times 3^1/_2 = 56$; если взять 15 коп., то $15 \times 3^1/_2 = 52^1/_2$; если, наконецъ, взять 14 коп., то $14 \times 3^1/_2$ равно 49 и слѣд. это вѣрный отвѣтъ. Но это мы узнали послѣдовательными умноженіями, дѣленіемъ же надо повести рѣшеніе такъ: за 49 коп. куплено 7 полъ-дестей: узнаемъ цѣну полъ-дести; будетъ $49:7=7$, столько стоитъ коп. полъ-дести; цѣна дести вдвое больше, т.-е. $7 \times 2 = 14$ коп. Такимъ образомъ здѣсь одно дѣйствіе, дѣленіе цѣлаго числа на дробь, произведено при помощи двухъ дѣйствій: дѣленія и умноженія.

На нѣсколькихъ числовыхъ примѣрахъ ученики убѣдятся, что отвѣтъ получается одинаковый, дѣлимъ ли мы на части или по содержанію, лишь бы дѣлимое и дѣлитель были тѣ же самые. Поэтому одинъ видъ дѣленія можно замѣнять другимъ и одинъ способъ дѣленія брать вмѣсто другого. Что дѣленіе на части сейчасъ же приводится къ дѣленію по содержанію, на это есть и иное доказательство, кромѣ одинаковости отвѣтовъ, притомъ такое, которое доступно дѣтямъ на этой ступени. Если, напр., какъ въ предыдущей задачѣ, требуется узнать цѣну 1 дести по данной стоимости (49 копеекъ) $3^1/_2$ дестей, то дѣленіе 49 копеекъ на $3^1/_2$ части можно привести къ дѣленію по содержанію такимъ разсужденіемъ: кладемъ на каждую десть по копейкѣ, будетъ $3^1/_2$ коп.; кладемъ еще по копейкѣ, будетъ еще $3^1/_2$ копейки, кладемъ по третьей, будетъ опять $3^1/_2$ копейки, и такъ придется на каждую десть по стольку копеекъ, сколько разъ $3^1/_2$ содержится въ 49. Такимъ объясненіемъ всякое дѣленіе на части можно замѣнить дѣленіемъ по содержанію. Поэтому мы, выбирая общій пріемъ дѣленія дробей, больше склоняемся къ тому, который выводится изъ дѣленія по содержанію, тѣмъ болѣе, что онъ имѣетъ связь съ именованными числами и на нихъ основывается. Дѣленіемъ по содержанію мы совѣтуемъ объяснять дѣленіе дробей.

Слѣд., правило дѣленія на дробь мы окончательно выражаемъ въ такой формѣ: дѣлимое и дѣлителя надо привести въ одинаковыя доли и потомъ раздѣлить числителя на числителя, не обращая вниманія на знаменателей. Этотъ пріемъ мы будемъ считать нормальнымъ и обязательнымъ, всѣ же остальные, не исключая опредѣленія цѣлаго числа по даннымъ его долямъ, относимъ

къ частнымъ пріемамъ, которые можно отложить до слѣдующаго курса.

§ 35. Дѣленіе дроби на дробь. Пользуясь основнымъ правиломъ, что для дѣленія на дробь надо дѣлимое и дѣлителя обратить въ одинаковыя доли и потомъ числителя раздѣлить на числителя, мы разбираемъ дѣленіе дроби на дробь, при чемъ беремъ сперва задачи на дѣленіе по содержанію, какъ болѣе подходящія къ смыслу нашего правила. Пусть данъ вопросъ: „сколько мѣшковъ по $4^1/_4$ пуда можно насыпать изъ $25^1/_2$ пудовъ?“ Очевидно, что этотъ вопросъ рѣшается дѣленіемъ, такъ какъ здѣсь мы узнаемъ, сколько разъ число $4^1/_4$ содержится въ $25^1/_2$. Прежде чѣмъ дѣлить, обращаемъ оба числа въ одинаковыя доли, т.-е. четвертыя, будетъ $^{102}/_4$ и $^{17}/_4$. Такъ какъ 17 долей содержатся въ 102 доляхъ ровно 6 разъ, то отвѣтъ 6 показываетъ, что изъ $25^1/_2$ пудовъ можно насыпать 6 мѣшковъ по $4^1/_4$ пуда.

Слѣдующій по порядку примѣръ будетъ тотъ, когда въ задачѣ требуется произвести дѣленіе на части. Беремъ задачу: „если $3^1/_2$ аршина проволоки вѣсятъ $^3/_4$ фунта, то сколько вѣситъ аршинъ?“ и безъ труда видимъ, что въ ней слѣдуетъ $^3/_4$ раздѣлить на $3^1/_2$, такъ какъ вѣсъ всей проволоки надо раздѣлить на $3^1/_2$ части. Частнымъ пріемомъ дѣйствія, который, впрочемъ, очень полезенъ для сообразительности учениковъ, мы считаемъ такой: если $^7/_2$ аршина вѣсятъ $^3/_4$ фунта, то половина аршина вѣситъ въ 7 разъ меньше, т.-е. $^3/_{28}$ ф., а въ аршинѣ $^2/_2$, онѣ вѣсятъ дважды по $^3/_{28}$, получится всего $^3/_{14}$ фунта. Нормальнымъ пріемомъ, знаніе котораго желательно для учениковъ и который они по возможности должны умѣть примѣнять, является тотъ, при которомъ дѣлимое и дѣлитель выражаются въ одинаковыхъ доляхъ: $^3/_4 : 3^1/_2 = ^3/_4 : ^7/_2 = ^3/_4 : ^{14}/_4 = ^3/_{14}$.

Къ наиболѣе труднымъ задачамъ надо отнести тѣ, въ которыхъ дѣлителемъ является доля или дробь. Онѣ трудны выборомъ дѣйствія, потому что въ нихъ неясно, какое надо употребить дѣйствіе. Напр., въ $^2/_3$ сутокъ часы отстаютъ на $^1/_5$ минуты; на сколько отстаютъ они въ сутки? Что здѣсь надо примѣнить дѣленіе, это указывается аналогичными случаями съ цѣлымъ и смѣшаннымъ дѣлителемъ: если бы часы отставали на $^1/_5$ минуты въ 2 дня или въ $2^1/_2$ дня, то для рѣшенія вопроса намъ пришлось бы дѣлить $^1/_5$ минуты на 2 или на $2^1/_2$; поэтому и въ данномъ случаѣ приходится дѣлить $^1/_5$ на $^2/_3$.

При дѣленіи цѣлаго числа съ дробью на цѣлое число съ дробью

ихъ обращаютъ обыкновенно въ неправильныя дроби, при чемъ, согласно нашему правилу, ихъ надо бываетъ выразить въ одинаковыхъ доляхъ. Если же пользоваться искусственнымъ ходомъ вычисленія, то можно дѣлимое не обращать въ дробь, а раздѣлить отдѣльно, сперва цѣлое число, потомъ дробь. Въ этомъ случаѣ будетъ полное сходство съ дѣленіемъ многозначнаго числа на однозначное, гдѣ каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится на дѣлителя.

§ 36. Сокращенія при умноженіи и дѣленіи дробей. Всевозможные сокращенные пріемы и облегчающіе способы, — а ихъ не мало въ дѣйствіяхъ надъ дробями, — не могутъ имѣть большого значенія въ приготовительномъ курсѣ. Цѣль этого курса дать нормальные, общеупотребительные способы, насколько это будетъ доступно пониманію дѣтей, и этимъ предоставить послѣдующему концентру возможность присоединить къ нимъ частные облегчающіе пріемы. Но если сама мысль учениковъ наталкиваетъ ихъ на сокращенные способы, то остается только радоваться сообразительности учениковъ и поощрять ее. Для примѣра возьмемъ такіе случаи:

a. При дѣленіи на 2 ученики пытаются раздѣлить числителя дроби даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда онъ представляетъ нечетное число. Такъ, дробь $^3/_5$ они дѣлятъ пополамъ въ пятыхъ доляхъ и получаютъ $\frac{1^1/_2}{5}$. Можно ли допустить такой отвѣтъ? Вполнѣ, потому что сообразительность учениковъ шла въ этомъ случаѣ совершенно правильнымъ путемъ: они смотрѣли на дробь, какъ на именованное число и, раздѣливши 3 доли пополамъ, естественно получили въ частномъ $1^1/_2$ пятыхъ доли, а письменно это представляется $\frac{1^1/_2}{5}$. Такимъ рѣшеніемъ ученики приблизились къ понятію о непрерывныхъ дробяхъ, подъ которыми и разумѣются дроби съ числителемъ, выраженнымъ при помощи смѣшаннаго числа. Подобный методъ можно допустить не только при дѣленіи на 2, но и въ случаѣ другихъ дѣлителей.

Особеннаго облегченія или выгоды употребленіе смѣшаннаго числителя не представляетъ, но, какъ частный пріемъ и упражненіе сообразительности, оно имѣетъ нѣкоторое значеніе.

b. Пріемы округленія, усвоенные дѣтьми еще въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ, должны имѣть мѣсто въ курсѣ дробей и пользоваться здѣсь вниманіемъ. Такъ, если требуется взять какое-нибудь количество $^6/_7$ раза, то достаточно отнять отъ него $^1/_7$ его часть.

Чтобы помножить на $^1/_9$, достаточно помножить данное число сперва на $^1/_3$, а полученное опять на $^1/_3$ (это пріемъ послѣдовательнаго умноженія на производителей).

§ 37. Увеличеніе и уменьшеніе чиселъ при помощи дѣленія и умноженія. Когда проходится умноженіе и дѣленіе дробей, то дѣти невольно обращаютъ вниманіе на то, что дѣйствія эти имѣютъ въ дробяхъ иной смыслъ, чѣмъ въ цѣлыхъ числахъ. Тамъ умноженіе равносильно увеличенію, а дѣленіе уменьшенію. Здѣсь же не всегда такъ: если умножаемъ на правильную дробь, то число уменьшается, и если дѣлимъ на правильную дробь, то оно увеличивается. Неправильно и неудачно поступалъ тотъ учитель, который въ цѣлыхъ числахъ признавалъ равнозначащими понятія „умножить“ и „увеличить“, „раздѣлить“ и „уменьшить“. Теперь ему приходится отказываться отъ своихъ опредѣленій и увѣрять, что умножить не всегда значитъ увеличить и раздѣлить не всегда значитъ уменьшить. Плохо переучивать тому, что выучено неправильно, и поэтому мы всегда совѣтуемъ въ цѣлыхъ числахъ умноженіе сводить къ сложенію, а дѣленіе къ разложенію, увеличеніе же и уменьшеніе считать лишь косвеннымъ слѣдствіемъ этихъ дѣйствій. Во всякомъ случаѣ учителю при прохожденіи дробей нельзя обойти молчаніемъ свойствъ умноженія и дѣленія и онъ обязанъ выяснить ихъ.

При умноженіи число уменьшается тогда, когда оно берется не нѣсколько разъ, а долю раза, т.-е., иначе сказать, берется часть этого числа. Если же число берется нѣсколько разъ и вообще болѣе одного раза, то оно отъ умноженія увеличивается.

Частное бываетъ меньше дѣлимаго всегда, когда дѣлителемъ бываетъ цѣлое число (выше единицы) или цѣлое число съ дробью. Если же дѣлить приходится на правильную дробь, то частное больше дѣлимаго и слѣд. дѣлимое можно считать въ этомъ случаѣ увеличивающимся. Причина увеличенія состоитъ въ томъ, что дѣлимое представляетъ собою въ этомъ случаѣ только часть того цѣлаго количества, которое отыскивается и которое должно составить частное.

§ 38. Къ числу вопросовъ, которые могутъ возбудить недоумѣніе учениковъ при прохожденіи дробей, принадлежитъ между прочимъ такой вопросъ, относящійся къ дѣленію дробей: можетъ ли при дѣленіи дроби на дробь получиться въ частномъ цѣлое число? Конечно, можетъ. Разъяснить это легче всего дѣленіемъ по содержанію. Что показываетъ частное въ этомъ случаѣ? Оно показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Очевидно,

что какую бы малую дробь мы ни взяли, къ ней всегда можно подобрать такую дробь, что первая содержится во второй цѣлое число разъ, иначе сказать первая въ цѣлое число разъ менѣе второй. Задавшись какой-нибудь маленькой дробью, помножаемъ ее на любое цѣлое (небольшое) число, и находимъ рядъ примѣровъ, въ которыхъ отъ дѣленія дроби на дробь получается въ частномъ цѣлое число.

§ 39. Еще считаемъ долгомъ обратить вниманіе учителя на слѣдующее затрудненіе, которое можетъ возникнуть въ простыхъ дробяхъ. Такъ какъ сложеніе и вычитаніе требуютъ приведенія къ одному знаменателю и при дѣленіи также дѣлимое и дѣлитель раздробляются въ одинаковыя доли, то слѣд. три дѣйствія изъ четырехъ нуждаются въ приведеніи къ одному знаменателю и у дѣтей, особенно у тѣхъ, которыя мало привыкли къ полной логичности мыслей, можетъ явиться заключеніе, что приводить къ одному знаменателю надо во всѣхъ четырехъ дѣйствіяхъ и между прочимъ въ умноженіи. Это заключеніе, конечно, ошибочно, но рѣшительно отвергать его нельзя: и въ умноженіи множимое съ множителемъ тоже можно приводить къ одному знаменателю, отвѣтъ при этомъ получится правильный, но это приведеніе нисколько не облегчаетъ дѣла и даже затрудняетъ его, потому что заставляетъ вычислять съ большими числами. Въ сложеніи и вычитаніи необходимо приводить къ одному знаменателю, въ дѣленіи хотя и не необходимо (по крайней мѣрѣ въ дѣленіи на части), но полезно, въ умноженіи же совершенно излишне. Такъ и надо разъяснить дѣтямъ.

§ 40. Когда закончено будетъ умноженіе и дѣленіе дробей, то для лучшаго повторенія и уясненія не лишнимъ будетъ сопоставить однородные случаи умноженія и дѣленія, на которыхъ дѣти чаще всего сбиваются. Для разработки ихъ лучше всего брать числа сходныя, чтобы при сходствѣ данныхъ чиселъ рельефнѣе могла представиться разница дѣйствій. Напримѣръ, возьмемъ такой рядъ вопросовъ: a. сколько разъ $1/3$ содержится въ $1/2$? Рѣшеніе производится дѣленіемъ $1/2$ на $1/3$, b. какую часть составляетъ $1/3$ отъ $1/2$? Здѣсь необходимо $1/3$ раздѣлить на $1/2$, c. во сколько разъ $1/2$ больше $1/3$? для этого $1/2$ надо раздѣлить на $1/3$, d. во сколько разъ $1/3$ меньше $1/2$? дѣйствіе то же, что и въ предыдущемъ случаѣ, т.-е. тѣ же вопросы для чиселъ 2 и 3, f. тѣ же вопросы для чиселъ 2 и $1/3$, g. тѣ же вопросы для чиселъ 3 и $1/2$, h. чему равна $1/2$ одной трети? $1/3 \times 1/2$. Чему равна $1/3$ половины? $1/2 \times 1/3$. Чему равна $1/2$ отъ 3? $3 \times 1/2$. Чему равна $1/3$ отъ 2? $2 \times 1/3$.

Всѣ подобные вопросы, примѣненные къ числамъ, имѣющимъ большое сходство между собою, помогаютъ разобраться въ различныхъ комбинаціяхъ чиселъ, сопоставить и разграничить случаи, въ которыхъ можетъ произойти смѣшеніе. Особенно полезно продѣлать всѣ эти комбинаціи на небольшихъ употребительныхъ числахъ и даже представить ихъ наглядно; тогда разница между ними можетъ запечатлѣться съ достаточной отчетливостью.

Еще есть два вопроса, которые сходны между собою по формѣ и поэтому заставляютъ дѣтей часто сбиваться, это нахожденіе части числа и нахожденіе цѣлаго числа по данной его части. Въ общеупотребительной формѣ эти вопросы представляются, напр., въ такомъ видѣ: a. чему равняются $^2/_3$ числа $^4/_7$? b. $^2/_3$ какого числа равняются дроби $^4/_7$? Первый вопросъ рѣшается умноженіемъ, потому что въ немъ приходится взять число $^4/_7$ двѣ трети раза, что равносильно опредѣленію $^2/_3$ числа $^4/_7$. Второй вопросъ рѣшается дѣленіемъ, такъ какъ въ немъ указано, сколько дано чиселъ (ихъ дано не нѣсколько, а только $^2/_3$) и чему они равняются (равняются $^4/_7$). Для первыхъ примѣровъ, разъясняющихъ разницу между обоими дѣйствіями, лучше брать не дроби, а доли.

Десятичныя дроби.

Понятіе о десятичныхъ дробяхъ и обозначеніе ихъ.

§ 41. Что такое десятичная дробь. Десятичной дробью называется такая, у которой знаменателемъ служитъ 10, 100, 1000 и т. д., вообще счетная единица. Если сопоставить опредѣленіе десятичной дроби съ опредѣленіемъ простой, или обыкновенной, дроби, то увидимъ, что десятичная является только частнымъ случаемъ обыкновенной, а не чѣмъ-то особеннымъ и противоположнымъ обыкновенной дроби. Простая дробь состоитъ изъ нѣсколькихъ долей единицы, также и десятичная, и съ тѣмъ только различіемъ, что у простой дроби знаменателемъ можетъ служить какое угодно число, а у десятичной лишь 10, 100 и т. д. Всѣ правила, выведенныя для дѣйствій съ простыми дробями, сохраняютъ полную силу и для десятичныхъ дробей, такъ что никакой новой теоріи десятичныхъ дробей не надо бы было и излагать, если бы

не стремились при помощи ея упростить и облегчить правила, выведенныя вообще для дробей.

Однимъ словомъ, десятичныя дроби надо считать частнымъ видомъ простыхъ и теорія ихъ имѣетъ цѣлью облегчить правила, выведенныя вообще для простыхъ дробей, съ примѣненіемъ ихъ къ частному случаю.

§ 42. Примѣры десятичныхъ дробей. Не къ чему долго трудиться надъ образованіемъ понятія о десятичныхъ дробяхъ. Оно уже дано учащимся въ видѣ общаго понятія о дробяхъ и теперь остается только ограничить его, ввести въ рамки. Если учитель желаетъ освѣжить представленіе о десятыхъ, сотыхъ и т. п. доляхъ, то лучше всего ему за единицу принять полосу клѣтчатой бумаги, напр., съ 1000 клѣтокъ, тогда на ней можно отлиневать и десятыя доли (положимъ, вертикальные столбики) и сотыя (горизонтальныя строчки). Разсматривая образованіе долей, дѣти замѣчаютъ, что доля каждаго слѣдующаго разряда получается изъ доли предыдущаго разряда при помощи дѣленія на 10. Отсюда и происходитъ названіе дробей „десятичныя": это тѣ, которыя образуются послѣдовательнымъ дѣленіемъ единицы на десять.

Чтобы представить яснѣе опредѣленіе десятичныхъ дробей, полезно, какъ и во всякомъ другомъ опредѣленіи, дать примѣры противоположнаго характера, т.-е. выходящіе изъ круга даннаго опредѣленія. Съ этой цѣлью учитель заставляетъ дѣтей указать на ряду съ десятичными дробями нѣсколько не-десятичныхъ дробей и объяснить, въ чемъ отличіе тѣхъ и другихъ.

§ 43. Раздробленіе и превращеніе десятичныхъ дробей. Подъ раздробленіемъ мы подразумѣваемъ обращеніе крупныхъ долей въ мелкія, а подъ превращеніемъ обращеніе мелкихъ въ крупныя. Изученіе раздробленія и превращенія способствуетъ лучшему знакомству съ десятичными долями и легкости вычисленій съ ними. Вопросы раздробленія и превращенія таковы: Сколько десятыхъ долей въ 3 единицахъ? Сколько сотыхъ въ 4 десятыхъ? Сколько тысячныхъ въ 5 сотыхъ? и т. п. Сколько десятыхъ долей въ 30 сотыхъ? Сколько сотыхъ въ 40 тысячныхъ? и т. п. Болѣе сложными вопросами будутъ тѣ, гдѣ раздробляется не одинъ разрядъ, а нѣсколько, гдѣ превращеніе совершается съ остаткомъ и гдѣ вообще преобразованіе идетъ на пространствѣ нѣсколькихъ разрядовъ. Напримѣръ: сколько тысячныхъ долей въ 3 сотыхъ и 5 тысячныхъ? сколько тысячныхъ долей въ 36 десятитысячныхъ? сколько тысячныхъ въ 2 десятыхъ?

Особенно отчетливо дѣти должны знать преобразованія 2 смежныхъ разрядовъ, которыя нужны бываютъ при 4 дѣйствіяхъ. Именно, при сложеніи и умноженіи требуется превращеніе въ слѣдующій высшій разрядъ, а при вычитаніи и дѣленіи раздробленіе одной или нѣсколькихъ крупныхъ долей въ слѣдующія мелкія.

§ 44. Письменное обозначеніе десятичныхъ дробей. Десятичныя дроби можно обозначать точно такъ же, какъ и простыя, т.-е. съ числителемъ и знаменателемъ. Но обыкновенно ихъ обозначаютъ для удобства безъ знаменателя. Иногда еще въ 3-мъ году обученія объясняютъ этотъ способъ письма безъ знаменателя, но если онъ не былъ тогда объясненъ, то это дѣло мы поведемъ такъ. Напомнимъ дѣтямъ, что въ цѣлыхъ числахъ счетныя единицы распредѣляются по разрядамъ, именно къ 1-му разряду относятся простыя единицы, ко второму десятки, къ третьему сотни и т. д., при чемъ единица каждаго слѣдующаго разряда въ 10 разъ больше единицы ближайшаго низшаго разряда. Тотъ же самый порядокъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ десятичныхъ долей. Онѣ тоже раздѣляются по разрядамъ: къ 1-му принадлежатъ десятыя доли, ко второму сотыя, къ третьему тысячныя и т. д., при чемъ одна доля высшаго разряда (считая первый за высшій) въ 10 разъ больше доли слѣдующаго разряда низшаго. Письменно обозначаются разряды въ цѣлыхъ числахъ такъ, что они идутъ въ порядкѣ убыванія величины слѣва направо, т.-е. чѣмъ единицы мельче, тѣмъ онѣ пишутся правѣе. Этотъ же порядокъ сохраняется и для десятичныхъ дробей: и въ нихъ, чѣмъ доли мельче, тѣмъ онѣ располагаются правѣе, такъ что на первомъ мѣстѣ послѣ цѣлыхъ единицъ ставятся десятыя доли, за ними сотыя, потомъ тысячныя и т. д. Чтобы отмѣтить, гдѣ кончаются цыфры цѣлыхъ единицъ и начинаются цыфры долей, ставятъ запятую. Если бы въ бесѣдѣ о письменномъ обозначеніи десятичныхъ дробей потребовалась наглядность, то подходящимъ пособіемъ будетъ метръ и его части, или же пучки соломы: тысячные, сотенные и по десятку; изъ нихъ же можно нарѣзать десятыхъ долей и даже сотыхъ. Всѣми этими путями легко навести на правило, что на первомъ мѣстѣ послѣ запятой пишутся десятыя доли, на второмъ сотыя, на третьемъ тысячныя и т. д. Письмо долей, такимъ образомъ, не представитъ никакой сбивчивости, если только добавить къ объясненному выше, что и въ доляхъ, подобно цѣлымъ числамъ, мѣста пропущенныхъ разрядовъ отмѣчаются нулями.

Что же касается дробей, въ которыхъ содержатся доли нѣсколькихъ разрядовъ, то надо предварительно разлагать ихъ на отдѣльные разряды и потомъ уже обозначать по порядку каждый разрядъ. Напр., задано написать 25 сотыхъ. Прежде всего спрашиваемъ, какія доли высшаго разряда содержатся въ этомъ числѣ и сколько. Отвѣтятъ, что содержатся десятыя, ихъ 2, потому что 20 сотыхъ = 2 десятымъ; кромѣ 2 десятыхъ есть еще 5 сотыхъ. И только послѣ разложенія дроби на разряды можно начать письмо: такъ какъ цѣлыхъ нѣтъ, то пишемъ 0 и ставимъ запятую (можно бы нуля не писать и прямо ставить запятую, но для точности пользуются обыкновенно нулемъ); на мѣстѣ десятыхъ ставимъ 2 и на мѣстѣ сотыхъ 5.

Чтеніе написаннаго совершается тоже не безъ участія раздробленія. Дробь 0, 25, по настоящему, надо бы прочитать такъ: двѣ десятыхъ 5 сотыхъ, по крайней мѣрѣ въ цѣлыхъ числахъ читаютъ, напр., число 5738 отдѣльно по разрядамъ „пять тысячъ семь сотъ тридцать восемь". Въ десятичныхъ же дробяхъ принято всѣ доли раздроблять въ наиболѣе мелкія и выражать число въ доляхъ низшаго разряда; напр., въ данной дроби 2 десятыхъ образуютъ 20 сотыхъ, а вмѣстѣ съ 5 сотыми — 25 сотыхъ.

Во всякой нумераціи выговариваніе представляется дѣломъ нѣсколько болѣе легкимъ, чѣмъ письмо; поэтому и въ десятичныхъ дробяхъ, если учитель не особенно надѣется на своихъ учениковъ, то пустъ лучше начнетъ съ чтенія дробей, которыя онъ пишетъ самъ своимъ ученикамъ: имъ это легче потому, что обозначеніе числа даетъ какъ бы точку опоры, какъ нѣкоторый фактическій матеріалъ, для примѣненія правила.

§ 45. Обращеніе десятичныхъ дробей въ простыя. Такъ какъ десятичная дробь является частнымъ видомъ простой, то поэтому всякая десятичная дробь можетъ считаться одновременно и простой и, слѣд., никакого обращенія десятичныхъ дробей въ простыя, собственно говоря, и не должно быть, по крайней мѣрѣ въ томъ смыслѣ, въ какомъ аршины обращаются въ вершки, годы въ мѣсяцы, цѣлыя единицы въ доли и вообще всякія величины, выраженныя въ единицахъ извѣстнаго разряда, выражаются въ другихъ болѣе или менѣе крупныхъ единицахъ. Во всѣхъ этихъ преобразованіяхъ одна и та же величина выражается различными числами, напр., величина метра можетъ выразиться числами: или единицей (1 метръ) или 1, 4 (аршина) или $22^1/_2$ (вершка) или

1000 (миллиметровъ) и т. п. Въ обращеніи десятичныхъ дробей въ простыя есть только нѣкоторое преобразованіе въ выраженіи чиселъ, но не преобразованіе величины съ измѣненіемъ числа: оно слагается изъ подписыванія знаменателя и изъ сокращенія, если только сокращеніе возможно. Въ устныхъ примѣрахъ знаменатель все равно не пишется никогда и поэтому тамъ обращеніе десятичной дроби въ простую состоитъ въ одномъ сокращеніи, напр. 25 сотыхъ = одной четверти. Примѣръ же „семь десятыхъ", если его разбирать устно, прекрасно доказываетъ, что подъ обращеніемъ десятичныхъ дробей подразумѣваютъ нѣчто побочное, именно подписываніе знаменателя и сокращеніе: такъ какъ „семь десятыхъ" не допускаетъ сокращенія и при устномъ объясненіи не нуждается въ подписываніи знаменателя, то поэтому „семь десятыхъ" въ равной мѣрѣ можно признавать и простой дробью (это общее понятіе) и десятичной дробью (это частное понятіе).

Мы предложили бы при обращеніи десятичной дроби въ простую поставить на первомъ планѣ сокращеніе и даже вмѣсто термина „обратить десятичную дробь въ простую" посовѣтовали бы употреблять выраженіе „сократить", такъ какъ это вопросъ совершенно опредѣленный, онъ приводитъ къ тому же результату, что и первый, но только не возбуждаетъ сомнѣній и неточныхъ толкованій. Съ этого учитель и можетъ начать, что давши дробь, напр., 0, 6, предлагаетъ сократить ее; тогда получится, что 0, 6 = $^{3}/_{5}$.

Если бы учитель все-таки пожелалъ придерживаться опредѣленнаго термина въ этомъ процессѣ, то представляется болѣе удобнымъ „обратить десятичную дробь въ не-десятичную", такъ какъ, опять повторяемъ, десятичную дробь обратить въ простую, собственно говоря, нельзя, ибо она составляетъ частный видъ простой.

Терминъ „обратить десятичную дробь въ простую" надо признать остаткомъ той старинной ариѳметики, которая была всецѣло основана на письменномъ счетѣ. Въ ней не давалось свободы ни личной сообразительности ученика, ни устному счету. Даже самыя легкія и самыя мелкія вычисленія, въ родѣ сложенія круглыхъ чиселъ, необходимо было по тогдашнимъ правиламъ производить письменными способами. Въ виду этого всѣ правила и всѣ термины брались въ примѣненіи къ цыфровымъ обозначеніямъ. А такъ какъ десятичная дробь по письменному выраженію рѣзко отличается отъ не-десятичной, то авторы учебниковъ забывали, что тѣ и другія дроби равнозначащи по сущности, и поэтому допускали выраженіе,

что однѣ дроби обращаются въ другія, вмѣсто того, чтобы говорить, что одно письменное обозначеніе замѣняется другимъ.

§ 46. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя. Вотъ этотъ терминъ, въ противоположность предыдущему, имѣетъ полный смыслъ и основаніе, такъ какъ не всякая простая дробь является въ то же время десятичной и нужны особенные пріемы, чтобы придать простой дроби спеціальный видъ дроби десятичной. Какъ это дѣлать, о томъ указанія встрѣчались раньше, именно, когда объяснялось раздробленіе долей. Дѣйствительно, что значитъ обратить дробь $^1/_2$ въ десятичную? Это значитъ выразить ее въ десятыхъ или сотыхъ и т. п. доляхъ. Самое близкое — обратить въ десятыя доли, получится $^5/_{10}$, что и составляетъ десятичную дробь; лишь для удобства подобныя дроби пишутся безъ знаменателя, такъ что общепринятая форма „0, 5" служитъ только добавочнымъ свойствомъ десятичной дроби, но не основнымъ.

Пользуясь способомъ раздробленія, можно много десятичныхъ дробей обратить въ простыя. Объясненіе здѣсь будетъ такое, напр. для дроби $^3/_{20}$: двадцатыя доли не обращаются въ десятыя, такъ какъ въ двадцатой только $^1/_2$ десятой; обращаемъ поэтому двадцатыя въ сотыя; въ единицѣ 100 сотыхъ, а въ $^1/_{20}$ въ 20 разъ меньше, т.-е. $^5/_{100}$, у насъ имѣется $^3/_{20}$, онѣ образуютъ трижды 5, т.-е. 15, сотыхъ; отвѣтъ будетъ $^{15}/_{100}$, или, какъ обыкновенно пишутъ, 0, 15.

Умѣнье считать устно, а также быстрое соображеніе того, какія доли мельче и во сколько разъ — а этому помогаетъ наглядность — позволяютъ съ успѣхомъ выполнять обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя.

Но что дѣлать въ тѣхъ случаяхъ, когда простая дробь обращается не въ точную десятичную? Вводить теорію періодическихъ дробей немыслимо въ приготовительномъ курсѣ, да мы ей не сочувствуемъ даже и въ систематическомъ курсѣ (какъ о томъ изложено во введеніи). Остается принять такія мѣры, которыя избавили бы отъ необходимости пользоваться періодическими дробями. Самая коренная мѣра — вести вычисленія въ простыхъ дробяхъ всякій разъ, когда хоть одна изъ имѣющихся въ вопросѣ дробей не можетъ дать точнаго десятичнаго вычисленія. Къ самымъ употребительнымъ долямъ этого рода ученики скоро могутъ приглядѣться и замѣтить ихъ, по крайней мѣрѣ съ наиболѣе извѣстными знаменателями; это третьи доли, шестыя, девятыя и вообще всѣ тѣ, гдѣ въ знаменатель входитъ тройка множителемъ. Присмотрѣвшись

къ такимъ долямъ, ученики вскорѣ выведутъ свое приближенное практическое правило и не будутъ уже пытаться производить съ ними десятичныхъ вычисленій. Въ другихъ болѣе трудныхъ дробяхъ самъ учитель можетъ предостеречь противъ перехода въ десятичныя дроби, предупредить, что отъ нихъ нельзя ждать точныхъ дробей. Вообще, въ приготовительномъ курсѣ учитель долженъ стараться выбирать примѣры лишь съ точными десят. дробями.

Но бываютъ случаи, что въ началѣ какой-нибудь задачи незамѣтно никакихъ признаковъ періодическихъ дробей, такъ какъ всѣ данныя величины выражены въ цѣлыхъ числахъ или точныхъ десятичныхъ дробяхъ, и періодическія дроби могутъ получиться, напр., отъ дѣленія одной десятичной дроби на другую въ срединѣ задачи. Какъ тогда поступить? остается или перевести вычисленіе на простыя дроби или же пользоваться приближеннымъ вычисленіемъ. Послѣднее обыкновенно совершается такъ, что всѣ доли, идущія за сотыми, отбрасываются и дѣйствія совершаются съ 2-мя десятичными разрядами. Конечно, это не совсѣмъ точно, къ тому же въ теоріи приближенныхъ вычисленій существуютъ болѣе тонкія правила. Но для цѣлей житейской практики этого совершенно достаточно и путемъ этимъ можно пользоваться съ успѣхомъ если не удается избѣжать періодическихъ дробей.

Придумываніе примѣровъ самими учениками можетъ привести въ этомъ случаѣ, какъ и въ другихъ подобныхъ, большую пользу. Ученики на вопросъ учителя, сперва представятъ рядъ дробей, которыя обращаются въ десятичныя, а затѣмъ рядъ необращаемыхъ дробей. Выводомъ у нихъ можетъ служить то, что „бываютъ дроби, которыя обращаются въ десятичныя, и бываютъ дроби, которыя не обращаются въ десятичныя“.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей.

§ 47. Сложеніе. Процессъ сложенія сходенъ до подробностей съ тѣмъ, какой имѣетъ мѣсто въ цѣлыхъ отвлеченныхъ числахъ. Такъ же идетъ сложеніе по разрядамъ, такъ же единицы высшаго разряда выдѣляются изъ единицъ низшаго, если ихъ накопится 10. При письменномъ сложеніи цифры подписываются такъ, чтобы каждый разрядъ стоялъ подъ соотвѣтствующимъ ему, дѣйствіе начинаютъ съ правой стороны и если долей какого-нибудь разряда окажется не менѣе 10, то каждыя десять долей замѣняются одной долей слѣдующаго высшаго разряда, соотвѣтствующую же цифру

пишутъ для памяти надъ цыфрами требуемаго разряда. Однимъ словомъ, ученикъ, умѣющій хоть нѣсколько думать самостоятельно, не станетъ втупикъ и произведетъ безъ всякихъ наводящихъ объясненій сложеніе десятичныхъ дробей такъ, какъ онъ произвелъ бы сложеніе цѣлыхъ многозначныхъ чиселъ.

§ 48. Вычитаніе. Это дѣйствіе напоминаетъ тоже почти во всемъ вычитаніе цѣлыхъ чиселъ: письменно оно начинается съ низшихъ разрядовъ и требуетъ заниманія единицы слѣдующаго разряда всякій разъ, когда число долей уменьшаемаго меньше числа долей вычитаемаго. Единственная особенность десятичныхъ дробей проявляется въ томъ случаѣ, когда въ уменьшаемомъ меньше разрядовъ, чѣмъ въ вычитаемомъ. Въ такомъ случаѣ бываетъ нужно заполнить недостающія мѣста нулями и вести дѣло обыкновеннымъ порядкомъ, напр., положимъ, требуется 1,29309 вычесть изъ 2,5. Дополняемъ четыре нуля для замѣщенія недостающихъ разрядовъ, подписываемъ разрядъ подъ разрядомъ и у насъ выйдетъ:

$$\begin{array}{r} \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ 2{,}50000 \\ \underline{1{,}29309} \\ 1{,}20691 \end{array}$$

Если бы, въ случаѣ слабой подготовки учениковъ, потребовалось оказать имъ помощь систематическимъ подборомъ примѣровъ, то простѣйшими видами сложенія надо считать тѣ, гдѣ нѣтъ превращенія, а вычитанія — гдѣ нѣтъ раздробленія, т.-е. заниманія. За ними идутъ примѣры съ однимъ превращеніемъ или однимъ раздробленіемъ, а потомъ примѣры съ нѣсколькими превращеніями или раздробленіями. Труднѣе всего дается то, когда нѣкоторыхъ разрядовъ въ суммѣ или въ уменьшаемомъ нѣтъ и мѣста ихъ заняты нулями: вычисленія съ нулями даютъ вообще не мало поводовъ къ сбивчивости.

Умноженіе и дѣленіе десятичной дроби на цѣлое.

§ 49. Умноженіе на однозначное и многознач. число. Раньше въ простыхъ дробяхъ было изучено, что для умноженія дроби на цѣлое число достаточно повторить числителя столько разъ, сколько единицъ во множителѣ. Это вытекаетъ изъ самаго опредѣленія дроби, когда разсматриваемъ ее какъ именованное число, въ кото-

ромъ числитель показываетъ количество единицъ, а знаменатель ихъ наименованіе. Поэтому, чтобы помножить десятичную дробь на однозначное число, помножаемъ разрядъ за разрядомъ десятичной дроби такъ, какъ если бы это были разряды цѣлаго числа, и запятой отдѣляемъ (при письменномъ дѣйствіи) столько разрядовъ въ произведеніи, сколько ихъ было во множимомъ, такъ какъ наименованіе или знаменатель произведенія тѣ же, что и во множимомъ. При устномъ вычисленіи помножаемъ количество долей множимаго на множителя и придаемъ произведенію такое же наименованіе, какимъ обладаетъ и множимое.

Эти общіе выводы не покажутся для учениковъ сколько-нибудь трудными, если порядкомъ самихъ упражненій они будутъ приведены отъ очевиднаго случая къ менѣе доступному. Сперва беремъ умноженіе безъ превращенія: 2, 34 × 2. На этомъ примѣрѣ видно, что разрядъ помножается за разрядомъ и запятой отдѣляется въ произведеніи столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ во множимомъ, иначе сказать, что произведеніе получается одного наименованія со множимымъ. Слѣдующій примѣръ: 2, 34 × 6. Въ немъ дѣло осложняется превращеніемъ, но выводъ относительно десятичныхъ знаковъ подтверждается тотъ же. Для устнаго счета удобенъ болѣе легкій примѣръ, въ родѣ 1, 5 × 3. Далѣе множимъ на двузначное число, напр. 2, 34 × 26; при этомъ число 234, т.-е. 234 сотыхъ доли, мы беремъ 26 разъ, получаемъ произведеніе 6084—столько сотыхъ долей; обращая сотыя въ цѣлыя единицы, мы отдѣляемъ справа 2 десятичныхъ знака и этимъ подкрѣпляемъ правило. Остается спросить у учениковъ еще нѣсколько примѣровъ, гдѣ бы десятичная дробь множилась на двузначнаго множителя или многозначнаго.

Выводъ: чтобы письменно умножить десятичную дробь на цѣлое число, надо помножить на цѣлое число числителя этой дроби, — а онъ находится отбрасываніемъ запятой — и въ полученномъ произведеніи отдѣлить справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ во множимомъ. Выводъ этотъ ученики должны понять и усвоить хорошо, такъ какъ на немъ основывается въ дальнѣйшемъ все умноженіе десятичныхъ дробей.

§ 50. Умноженіе на 10, 100, 1000 и т. д. Въ десятичныхъ дробяхъ это умноженіе пользуется значеніемъ, такъ какъ при письменномъ производствѣ можно его упростить и привести къ перенесенію запятой на 1, 2, 3 и т. д. знака вправо. Правило этого дѣйствія очень легкое, но это обстоятельство налагаетъ еще болѣе

обязанности позаботиться о томъ, чтобы правило было выведено сознательно и ясно. А такъ какъ всякій выводъ даетъ тѣмъ болѣе сознательности, чѣмъ болѣе онъ связанъ съ пройденнымъ ранѣе матеріаломъ, то и умноженіе на 10, 100, 1000 и т. д. лучше всего было бы выводить изъ общаго порядка умноженія на цѣлое число. Взявши какую-нибудь дробь, напр. 3,123456 и помножая ее на десять, получаемъ сперва произведеніе 31234560, а потомъ отдѣляемъ въ немъ столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ было во множимомъ, и отвѣтъ тогда составитъ 31, 23456. Подобнымъ же образомъ можно продѣлать умноженіе на 100, 1000 и т. д.

На это правило, хотя оно относится вполнѣ къ письменному вычисленію, необходимо пройти достаточно упражненій и устно. Этимъ мы освѣтимъ лучше и укрѣпимъ письменный пріемъ. Иначе онъ будетъ являться постоянно сбивчивымъ для дѣтей, такъ какъ параллельно съ нимъ существуютъ схожіе пріемы умноженія на десятыя, сотыя и т. д., дѣленія на нихъ и дѣленія на 10, 100, 1000. Если не разъяснить, какъ слѣдуетъ, то дѣти постоянно будутъ сбиваться въ томъ, когда надо переносить запятую въ правую сторону и когда въ лѣвую.

§ 51. Дѣленіе на однозначное и многозначное число. Подобно простымъ дробямъ, въ дѣйствіяхъ надъ десятичными опять лучше изучать сходные пріемы совмѣстно, поэтому-то дѣленіе на цѣлое число лучше прямо поставить за умноженіемъ на цѣлое число, такъ какъ и въ томъ и въ другомъ дѣйствіи главная цѣль указать на сходство съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами. Въ дѣленіи это сходство состоитъ въ слѣдующемъ. Каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится послѣдовательно, начиная съ высшаго, на дѣлителя; если отъ какого-нибудь разряда получится остатокъ, то онъ раздробляется въ единицы слѣдующаго низшаго разряда и прикладывается къ имѣющимся тамъ единицамъ. Новаго сравнительно съ цѣлыми числами это дѣйствіе ничего не даетъ, кромѣ развѣ того, что не надо забывать ставить запятую въ частномъ, какъ только раздѣленъ разрядъ простыхъ единицъ. Возьмемъ примѣръ для объясненія. Раздѣлимъ 15, 7808 на 8. Дѣлимъ 15 на 8, получаемъ въ частномъ 1 единицу, ее пишемъ въ частномъ и ставимъ запятую. Въ остаткѣ у насъ получилось 7 единицъ, ихъ раздробляемъ въ десятыя, получаемъ 70 десятыхъ, да есть еще у насъ 7 десятыхъ, всего 77 десятыхъ; дѣлимъ ихъ на 8, будетъ 9 и 5 десятыхъ въ остаткѣ; 5 десятыхъ обращаемъ въ сотыя, будетъ 50 сотыхъ, да 8, всего

58 сотыхъ; дѣлимъ ихъ на 8, будетъ 7 и въ остаткѣ 2 сотыхъ. Ихъ раздробляемъ въ тысячныя, получится 20 тысячныхъ, дѣлимъ на 8, будетъ 2 тысячныхъ и 4 въ остаткѣ; 4 тысячныхъ раздробляемъ въ десятитысячныя, получится 40, да 8, всего 48; 48 десятитысячныхъ раздѣлить на восемь, получится 6 десятитысячныхъ. Всего получилось 1, 9726. Здѣсь при дѣленіи въ частномъ не встрѣтилось нулей. Если же они встрѣчаются, то обыкновенно представляютъ не мало затрудненій для начинающихъ учениковъ.

Чтобы не наводить учениковъ на безконечное дѣленіе и тѣмъ не осложнять дѣла безъ всякой цѣли и пользы, учителю слѣдуетъ подбирать только такихъ дѣлителей, которые приводятъ къ конечному дѣленію: это будутъ числа, состоящія изъ множителей 2 и 5 въ любыхъ комбинаціяхъ.

Тѣмъ же самымъ порядкомъ, какимъ десятичная дробь дѣлится на цѣлое число, можно произвести дѣленіе цѣлаго на цѣлое, если оно совершается съ остаткомъ. Обыкновенно, если дѣлимое меньше дѣлителя, такая задача облекается въ слѣдующую форму: какую десятичную долю одного числа составляетъ другое данное число? напр., какую десятичную долю числа 16 составляетъ число 15? Во всѣхъ подобныхъ задачахъ, когда требуется узнать, какую долю меньшее число составляетъ отъ большаго, дѣлятъ меньшее число на большее, такъ и здѣсь 15 надо раздѣлить на 16. Дѣлитель не содержится въ дѣлимомъ ни одного цѣлаго раза, поэтому ставимъ въ частномъ на мѣстѣ цѣлыхъ единицъ нуль, отдѣляемъ его справа запятой и раздробляемъ 15 въ десятыя доли, получится 150 десятыхъ; дѣлимъ 150 на 16, получимъ въ частномъ 9 десятыхъ и въ остаткѣ 6 десятыхъ. Затѣмъ 6 десятыхъ раздробляемъ въ сотыя, будетъ 60 сотыхъ, дѣлимъ на 16, въ частномъ будетъ 3 сотыхъ и въ остаткѣ 12 сотыхъ. Эти 12 сотыхъ, будучи обращены въ тысячныя и раздѣлены на 16, дадутъ въ частномъ 7 тысячныхъ и въ остаткѣ 8 тысячныхъ. Наконецъ 80 десятитысячныхъ : 16 = 5 десятитысячныхъ. Всего въ отвѣтѣ получится 0,9375 и эта дробь показываетъ, что число 15 составляетъ такую часть числа 16.

§ 52. Дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д. Оно можетъ итти тѣмъ же самымъ порядкомъ, что и дѣленіе на всякое цѣлое число. Такъ же дѣлится разрядъ за разрядомъ и ставятся нули въ частномъ тогда, когда отъ раздѣленія какого-нибудь разряда единицъ не получится. Правило же дѣленія на 10, 100, 1000 и т. д. напоминаетъ соотвѣт-

ствующее правило умноженія и выражается такъ: чтобы письменно раздѣлить на 10, достаточно запятую перенести влѣво на одинъ знакъ; чтобы раздѣлить на 100, — на 2 знака; на 1000, — на 3 и т. д.

Вообще говоря, эти случаи умноженія и дѣленія на счетныя единицы не заслуживали бы никакого особеннаго вниманія, если бы не та легкость запоминанія правилъ, которая много подкупаетъ въ свою пользу. Поэтому, если бы у учителя дѣти не особенно быстро увидали обобщеніе и не могли бы самостоятельно вывести этого легкаго правила, то полезнѣе будетъ обождать съ нимъ и отложить его до слѣдующаго года. Дѣйствительно, само правило имѣетъ меньше цѣны, чѣмъ правильный выводъ, и лучше подождать того времени, когда дана будетъ возможность для настоящаго вывода.

Умноженіе и дѣленіе на десятичную дробь.

§ 53. Умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь. Цѣлое число въ качествѣ множимаго берется сначала потому, что оно легче дробнаго множимаго и въ этомъ случаѣ можно сосредоточить все вниманіе на множителѣ. Что касается послѣдняго, то простѣйшій множитель — это 0, 1; 0,01; 0,001: дѣйствительно, множителя проще одной десятичной доли представить себѣ нельзя. Поэтому беремъ для начала такой примѣръ: $333 \times 0, 1$. Рѣшить его можно на основаніи простыхъ дробей, замѣнивши обозначеніе 0, 1 болѣе знакомымъ обозначеніемъ $^1/_{10}$; если число 333 взять $^1/_{10}$ раза, то получится $33^3/_{10}$, какъ о томъ было своевременно объяснено въ простыхъ дробяхъ, или, по переводѣ въ десятичныя, 33,3. Чтобы не вводить лишнихъ хлопотъ съ переводомъ изъ десятичныхъ дробей въ простыя и обратно, можно рѣшить этотъ примѣръ устно и только строчку рѣшенія записать при помощи нумераціи десятичныхъ дробей такъ: $333 \times 0, 1 = 33, 3$. Взявши еще нѣсколько совершенно однородныхъ примѣровъ $777 \times 0, 1$ или $999 \times 0, 1$, мы наведемъ учениковъ на правило, что при умноженіи на 0, 1 одинъ знакъ справа отчеркивается на десятыя доли. Каково же будетъ произведеніе, если умножить не на 0, 1, а на 0, 01? Продѣлываемъ на предыдущихъ примѣрахъ и видимъ, что оно будетъ равняться 3,33, 7,77, 9,99, т.-е. стоитъ только отчеркнуть во множимомъ два знака для сотыхъ долей. Сопоставляя теперь умноже-

ніе на 0,1 и на 0,01 и видя, что въ первомъ случаѣ отчеркивается одинъ знакъ справа и во второмъ два, ученики могутъ сообразить, что для умноженія на 0,001 придется отчеркивать тысячныя доли, т.-е. 3 знака, при умноженіи на 0,0001 четыре знака и т. д. Такое обобщеніе очень важно для послѣдующаго дѣйствія, т.-е. для умноженія не на одну долю, а на нѣсколько.

Примѣромъ умноженія цѣлаго числа на какую угодно десятичную дробь можно взять хоть 22 $\times$ 0,3. Выполняя устно это дѣйствіе, мы, согласно правилу простыхъ дробей, беремъ сперва 0,1 числа 22, получится 2,2 и затѣмъ 2,2 повторяемъ 3 раза, такъ какъ намъ задано взять число 22 не одну десятую раза, а три десятыхъ. Точно такъ же производимъ умноженіе 22 на 0,2 и 0,4, получится 4,4 и 8,8. Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы увидать, что, когда цѣлое число множится на сколько-нибудь десятыхъ долей, то достаточно помножить цѣлое число на количество десятыхъ долей, какъ на цѣлое, и въ отвѣтѣ отчеркнуть одинъ знакъ справа за то, что множитель состоитъ изъ десятыхъ долей. Затѣмъ это же подкрѣпляется на смѣшанномъ множителѣ: 22 $\times$ 1,6; 22 $\times$ 2,3 и распространяется на примѣры съ сотыми и тысячными долями, во всѣхъ въ нихъ множимое умножается на множителя, какъ на цѣлое число, и потомъ въ произведеніи отчеркивается 1, 2 или 3 и т. д. знака, смотря по тому, состоитъ ли множитель изъ десятыхъ долей, сотыхъ, тысячныхъ и т. д.

Самыми трудными примѣрами будутъ тѣ, гдѣ множитель состоитъ изъ единицъ не одного разряда, а нѣсколькихъ и поэтому для объясненія нужно бываетъ доли всѣхъ разрядовъ раздробить въ одинъ. Напр., дано помножить 124 на 3,16. Множитель равенъ 316 сотымъ. Находимъ одну сотую числа 124 и для этого отчеркиваемъ справа или, что все равно, попомнимъ пока, что 124 — не цѣлыя единицы, а сотыя доли. Тогда 124 доли множимъ на 316, получимъ 39184 доли, а такъ какъ это доли сотыя, то отчеркиваемъ 2 знака справа, будетъ тогда 391,84. Вотъ это послѣднее объясненіе, при которомъ множитель обращается въ дробь, потомъ множимое принимается за доли того разряда, къ которому принадлежитъ множитель, затѣмъ множимое и множитель перемножаются, какъ цѣлыя числа, и, наконецъ, отчеркивается въ произведеніи столько знаковъ, сколько ихъ во множителѣ, — это объясненіе наиболѣе подготовляетъ къ умноженію десятичной дроби на десятичную.

§ 54. Умноженіе десятичной дроби на десятичную дробь. Во главѣ ставится опять тотъ случай, когда множителемъ берется одна десятичная доля, напр. 0,1 или 0,01. Пусть требуется умножить на нее число 55,55. Вспоминаемъ правило умноженія на десятичную дробь, именно что надо умножить на цѣлое число, показывающее количество долей — здѣсь цѣлое число составляетъ 1 — и потомъ въ произведеніи отчеркнуть справа одинъ знакъ при умноженіи на десятыя доли, два знака при умноженіи на сотыя и т. д. Поэтому въ данномъ примѣрѣ отчеркиваемъ пятерку, обозначающую простыя единицы, и получаемъ 5,555. Это рѣшеніе полезно провѣрить и другими способами, напр. умноженіемъ по разрядамъ, что совершается такъ: взять отъ 55 единицъ 0,1, получится 5,5; потомъ 0,1 взять отъ 5 десятыхъ, будетъ 5 сотыхъ; потомъ 0,1 взять отъ 5 сотыхъ, будетъ 5 тысячныхъ, всего 5,555. Еще можно провѣрить при помощи простыхъ дробей: $55{,}55 = \frac{5555}{100}$, $0{,}1 = {}^1/_{10}$, $\frac{5555}{100} \times {}^1/_{10} = \frac{5555}{1000} = 5{,}555$. Провѣрка чрезвычайно полезна, во-первыхъ, потому, что укрѣпляетъ въ сознаніи учениковъ истинность ариѳметическаго вывода, а во-вторыхъ, потому, что сближаетъ изученные отдѣлы и заставляетъ ихъ повторять, при этомъ повторять сравнительно, чѣмъ еще больше возбуждается соображеніе и развивается ассоціативная память. (Впрочемъ провѣрка, какъ примѣненіе иныхъ способовъ, умѣстна болѣе тогда, когда основной способъ не особенно затруднителенъ.)

Продѣлавши нѣсколько однородныхъ примѣровъ, въ родѣ 66,66 × 0,1 и 775,77 × 0,1 и обративши вниманіе учениковъ на то, что во всѣхъ произведеніяхъ получается по 3 десятичныхъ знака, учитель спрашиваетъ: почему именно по 3 знака, почему не по 2 и не по 4? Вѣдь во множимомъ было по 2 десятичныхъ знака? Ученики говорятъ, что по два знака было во множимомъ да еще по одному знаку отчеркнуто за то, что множитель выраженъ въ десятыхъ доляхъ, т.-е. въ немъ одинъ десятичный знакъ. А если бы во множимомъ было не 2 знака, а 3 или 4, то сколько бы тогда было въ произведеніи знаковъ (при прежнемъ множителѣ)? А если бы множить мы начали не на 0,1, а на 0,01 или 0,001, то тогда въ нашихъ результатахъ сколько пришлось бы отдѣлять знаковъ? Всѣ эти вопросы разрѣшаются учениками въ видѣ догадки и потомъ провѣряются на примѣрахъ, если возникаетъ сомнѣніе въ основа-

тельности догадки. Множитель берется каждый разъ простѣйшій, т.-е. съ одной долей, въ крайнемъ случаѣ двумя, т.-е. 0,2 или 0,02. На этихъ примѣрахъ съ простѣйшими множителями и даются основы правила, что въ произведеніи надо отдѣлять отъ правой руки столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ во множимомъ и множителѣ вмѣстѣ. Остается распространить его на какіе угодно примѣры. Если, напр., дается умножить 3,24 на 0,12, то напоминаемъ дѣтямъ прежде всего: какъ бы они помножили на 0,01? Сколько десятичныхъ знаковъ отчеркнуть надо въ произведеніи?—4. Почему? потому что два знака надо отчеркнуть за множимое и за множителя 2. Но у насъ требуется помножить не на одну сотую, а на 12, поэтому, помня, что въ произведеніи придется отчеркнуть 4 знака, мы должны число долей множимаго, т.-е. 324, умножить на 12. Сдѣлавши это, получимъ число 3888, въ которомъ отчеркиваемъ 4 разряда справа, такъ что окончательный отвѣтъ будетъ 0,3888.

Какъ видно изо всего предыдущаго, мы приводимъ умноженіе десятичныхъ дробей къ отчеркиванію въ произведеніи стольких знаковъ, сколько ихъ въ множимомъ и множителѣ вмѣстѣ, само же произведеніе получается отъ перемноженія числа долей множимаго на число долей множителя. Такимъ образомъ нашъ выводъ склоняется исключительно въ сторону письменнаго процесса и выражается въ такой формѣ, которая примѣнима къ письменному вычисленію. Но его можно и притомъ съ немалой пользой нѣсколько расширить и примѣнить къ умноженію вообще, включая и устное. Тогда придется измѣнить немного въ ходѣ и характерѣ вопросовъ; напр., въ случаѣ умноженія 3,24 на 0,12 бесѣда будетъ такая: Какія доли у насъ во множимомъ? сотыя. Сколько ихъ? 324. Какія доли во множителѣ? сотыя. Сколько ихъ? 12. Если помножить сотыя доли на сотыя, то какія доли получатся въ произведеніи? десятитысячныя. Какъ узнать, сколько ихъ будетъ въ произведеніи? во множимомъ ихъ 324, повторить надо 12 разъ, будетъ 3888. Столько десятитысячныхъ долей. Письменный отвѣтъ представится въ видѣ 0,3888. Это объясненіе намъ кажется нѣсколько удобнѣе предыдущаго, такъ какъ оно общѣе и кромѣ того оно ближе связывается съ правилами простыхъ дробей, которыя, предполагается, уже достаточно знакомы дѣтямъ. Первое же объясненіе, спеціально письменное, пользуется въ настоящее время большимъ распространеніемъ въ учебникахъ и окончательный выводъ его, т.-е. правило умноженія десятичной дроби на десятичную, легко запоминается.

§ 55. Дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь. Изъ пройденнаго о простыхъ дробяхъ должно хорошо остаться въ памяти дѣтей, что при дѣленіи дробей онѣ обращаются въ одинаковыя доли и затѣмъ опредѣляется, сколько разъ одинъ числитель содержится въ другомъ. Къ этому правилу ничего не остается добавлять новаго и въ десятичныхъ дробяхъ. Надо постараться только расположить примѣры въ постепенности. Самые легкіе, конечно, тѣ, гдѣ цѣлое число дѣлится на 0,1 или 0,01. Сколько разъ 0,1 содержится въ 2 единицахъ? въ 3-хъ? въ 7? въ 9? Ученики безъ труда отвѣчаютъ, что 20 разъ, 30 разъ и т. д. Почему? потому что въ одной единицѣ десятая доля содержится 10 разъ, а въ 2-хъ единицахъ дважды по 10, т.-е. 20 разъ, въ 3 единицахъ трижды по 10, т.-е. 30 разъ, и т. д. Какъ еще можно объяснить эти примѣры? можно раздробить 2 единицы въ десятыя доли, будетъ 20 десятыхъ; въ 20 десятыхъ 1 десятая содержится 20 разъ; также въ 3 единицахъ, т.-е. въ 30 десятыхъ, содержится 1 десятая 30 разъ, и т. д. Такими доступными устными примѣрами мы яснѣе всего убѣдимъ дѣтей, что для дѣленія стоитъ только обратить данныя числа въ одинаковыя доли, въ данномъ случаѣ раздробить дѣлимое въ доли дѣлителя, и потомъ узнать, сколько разъ одинъ числитель содержится въ другомъ. Послѣ дѣлителя, состоящаго изъ однѣхъ десятыхъ долей, надо взять такого, который состоялъ бы изъ сотыхъ или тысячныхъ; потомъ можно перейти къ какимъ угодно десятичнымъ дробямъ и, наконецъ, примѣнить выводъ къ самому трудному случаю, когда дѣлитель состоитъ изъ цѣлаго числа съ дробью. Примѣры учениковъ могутъ много помочь для вывода правила, когда эти примѣры располагаются въ постепенности, по указаніямъ учителя. Полезно напомнить еще разъ о сходствѣ въ дѣленіи именованныхъ чиселъ, простыхъ дробей и десятичныхъ.

Въ дѣленіи дробей мы вездѣ пользуемся случаемъ дѣленія по содержанію, такъ какъ въ немъ яснѣе выдѣляется требованіе приводить дроби къ одному знаменателю. Ученикамъ теперь пора уже постигнуть, что оба случая дѣленія, и на части и по содержанію, приводятъ къ одному отвѣту, лишь бы данныя числа были одинаковы. Поэтому въ задачахъ на дѣленіе на части можно находить отвѣтъ тѣмъ самымъ пріемомъ, какой выведенъ для дѣленія по содержанію, т.-е. при помощи обращенія дѣлимаго и дѣлителя въ одинаковыя доли. Отъ времени до времени полезно возобновлять въ мышленіи дѣтей тотъ ходъ, которымъ идетъ спеціальное дѣленіе

на части. Напр., въ задачѣ „0,2 пуда стоятъ 6 руб., сколько стоитъ пудъ?“ объясненіе можно повести такъ: „для опредѣленія стоимости 1 пуда надо 6 руб. раздѣлить на 0,2, такъ какъ во всѣхъ подобныхъ задачахъ, гдѣ надо найти величину 1 единицы, дѣлится величина всѣхъ единицъ на число единицъ; чтобы 6 раздѣлить на 0,2, мы можемъ выразить ихъ въ одинаковыхъ доляхъ, получится: 60 десятыхъ раздѣлить на 2 десятыхъ; сперва узнаемъ, сколько стоитъ 0,1 пуда, для этого 60 десятыхъ дѣлимъ на 2, будетъ 30 десятыхъ, потомъ узнаемъ стоимость 10 десятыхъ, такъ какъ въ пудѣ всегда бываетъ 10 десятыхъ; для этого 30 десятыхъ умножимъ на 10, получится 30, такъ какъ $^1/_{10} \times 10 = 1$, слѣд., и $^{30}/_{10} \times 10 = 30$. Въ этомъ примѣрѣ при дѣленіи на части мы воспользовались приведеніемъ къ одному знаменателю не потому, что такъ дѣлать нужно или удобно, а затѣмъ, чтобы доказать, что такъ дѣлать возможно.

§ 56. Дѣленіе десятичной дроби на десятичную дробь. Этотъ случай совершенно одинаковъ по ходу вычисленія съ предыдущимъ и только тѣмъ сложнѣе его, что здѣсь надо раздроблять въ одинаковыя доли не цѣлое число съ дробнымъ, а дробныя числа. Оба случая дѣленія на десятичную дробь можно разработать бы вмѣстѣ и при этомъ условіи во главѣ поставить тѣ примѣры, въ которыхъ дѣлимое и дѣлитель выражаются въ одинаковыхъ доляхъ и слѣд. обращать въ одинаковыя доли не требуется.

Но и нашъ путь, при которомъ дѣленіе десятичной дроби на десятичную дробь выдѣляется въ особенный пунктъ, идущій за дѣленіемъ цѣлаго числа на дробь, мы не считаемъ труднымъ и надѣемся достигнуть при помощи его удовлетворительныхъ результатовъ.

Послѣ примѣровъ, гдѣ оба данныхъ числа содержатъ поровну десятичныхъ знаковъ и гдѣ дѣленіе идетъ безъ всякой задержки, беремъ устные, легкіе примѣры съ десятыми или сотыми долями, такъ чтобы количество долей выражалось легкими числами, напримѣръ, 0, 6 : 0, 03 или 2,5 : 0,5 и т. п. На нихъ представится достаточно практики для того, чтобы натолкнуться на правило и формулировать его. Правило можно выразить такъ: для дѣленія десятичной дроби на десятичную надо привести ихъ въ одинаковыя доли и потомъ, отбросивши запятыя, раздѣлить одно число на другое. Потребуется еще нѣсколько болѣе трудныхъ письменныхъ примѣровъ для того, чтобы основательно утвердить это правило.

Записывать дѣйствіе ученики должны такимъ образомъ, чтобы вычисленіе представлялось яснымъ и точнымъ. Для предыдущаго примѣра 2,5 : 0,5 лучше взять такую форму записи: 2,5:0,5 = = 25 : 5 = 5; здѣсь промежуточное преобразованіе входитъ въ составъ равенства, а не дѣлается гдѣ-нибудь въ сторонѣ.

Замѣтки о рѣшеніи задачъ.

§ 57. Дѣйствія надъ дробными именованными числами. Въ задачахъ 4-го года, когда проходится приготовительный курсъ дробей, начинаютъ встрѣчаться дробныя именованныя числа, не только простыя, но и составныя. Еще въ методикѣ III года было указано, что ни житейскія потребности, ни образовательная цѣль обученія не вынуждаютъ пользоваться многосоставными именованными числами, т.-е. выраженными въ мѣрахъ четырехъ, пяти и болѣе наименованій. Сочетаніе берковца съ золотниками или версты съ дюймами представляетъ настолько рѣдкій случай въ практическихъ вычисленіяхъ, что ариѳметика въ правѣ имъ пренебречь, тѣмъ болѣе, что и для сообразительности этотъ случай даетъ очень мало новаго. Въ дробныхъ именованныхъ числахъ еще рѣже, чѣмъ въ цѣлыхъ, должны встрѣчаться мѣры нѣсколькихъ наименованій, потому что къ дробямъ затѣмъ и обращаются, чтобы привести вопросъ къ мѣрамъ одного наименованія.

Разрѣшимъ нѣсколько недоумѣній, съ которыми могутъ встрѣтиться ученики при рѣшеніи задачъ на именованныя дробныя числа. Во-первыхъ, какъ поступать при сложеніи и вычитаніи, если нѣкоторыя изъ данныхъ величинъ выражены составными именованными числами цѣлыми, а другія простыми именованными числами дробными. Напр., требуется сложить $^4/_7$ пуда съ 3 пудами 25 ф. 12 зол. Очевидно, для рѣшенія возможно допустить 2 способа: или $^4/_7$ пуда обратить въ составное именованное число, получится 22 ф. $82^2/_7$ зол., или же второе слагаемое выразить въ частяхъ пуда, получится $3\frac{201}{320}$. Сумма по первому способу будетъ равна 4 п. 7 ф. $94^3/_7$ зол., а по второму $4\frac{447}{2240}$ пуда. Который же изъ этихъ способовъ надо признать болѣе употребительнымъ? Тотъ, который болѣе соотвѣтствуетъ пониманію учениковъ, представляется для нихъ болѣе посильнымъ и вообще избирается ими. Пусть этимъ способомъ они

и пользуются. Что же касается второго, то хорошо бы навести и на его примѣненіе, потому что чѣмъ болѣе способовъ знаютъ ученики, тѣмъ лучше они понимаютъ вопросъ.

При умноженіи и дѣленіи составного именованнаго числа на дробь можно производить дѣйствіе отдѣльно надъ мѣрами каждаго наименованія, или можно привести всѣ мѣры къ одному наименованію или же можно, наконецъ, сперва все число помножить на числителя множителя или знаменателя дѣлителя, а полученное раздѣлить на знаменателя множителя или числителя дѣлителя. Послѣдній пріемъ болѣе коротокъ и, если выяснить его на небольшихъ числахъ и сравнить съ первыми двумя, то этимъ будетъ данъ новый порядокъ для умноженія и дѣленія на дробь.

§ 58. Метрическія мѣры. Метрическія мѣры являются наилучшимъ матеріаломъ для задачъ съ десятичными дробями. Онѣ даютъ, по самому свойству своему, естественныя десятичныя доли. Если же принять во вниманіе, что распространеніе метрической системы желательно во всѣхъ коммерческихъ расчетахъ, то еще болѣе убѣдимся, насколько умѣстны метрическія мѣры для задачъ съ десятичными дробями.

Однако есть доводы противъ полнаго и всесторонняго изученія метрической системы. Эти мѣры, какъ ни удобны, все еще не замѣнили русскихъ мѣръ и большинству русскихъ людей онѣ не знакомы, въ жизнь онѣ не вошли. Большинство мелкихъ подраздѣленій представляется для учениковъ не столько въ видѣ мѣръ, осязательныхъ и знакомыхъ, сколько въ видѣ трудныхъ словъ, безъ опредѣленнаго содержанія. Поэтому, всецѣло склоняясь на сторону десятичной системы мѣръ, мы въ то же время думаемъ, что для начальной школы достаточно будетъ, если она введетъ въ свою программу не метрическую систему во всей ея полнотѣ, а основныя, болѣе употребительныя метрическія единицы. Полное же изученіе системы умѣстно въ народной школѣ только при томъ условіи, если эта система войдетъ въ народъ.

§ 59. Задачи на нахожденіе части числа и цѣлаго числа по данной части. Эти два вида задачъ встрѣчаются въ полномъ объемѣ въ первый разъ въ главѣ о дробяхъ, такъ какъ въ дѣйствіяхъ съ цѣлыми числами онѣ могутъ быть примѣнены въ самой ограниченной степени. Какъ первый видъ, такъ въ особенности второй приноситъ не мало сбивчивости ученикамъ, и не только потому, что въ вычисленія входятъ дроби, но еще болѣе потому, что

предметомъ дѣйствія является не простая единица, а число, и слѣдовательно въ одномъ вопросѣ сталкиваются два понятія: часть единицы и часть числа. Принимая число за условную единицу, въ противоположность простой, мы можемъ задачу на опредѣленіе цѣлаго числа по данной части причислить къ алгебраическимъ, такъ какъ въ ней имѣется налицо характерный признакъ алгебраическихъ задачъ, именно операціи надъ условной единицей.

Для облегченія разбираемыхъ задачъ надо наглядно представить различіе между частью числа и частью единицы, а для этого облечь число въ какой-нибудь конкретный образъ, напр., обозначить его при помощи опредѣленной линіи, которую затѣмъ дѣлить на части и подписывать надъ каждой частью ея значеніе, или при помощи куска бумаги, который опять же можно перегибать на части. Весь процессъ, требующійся въ условіи задачи и подлежащій производству надъ числомъ, слѣдуетъ наглядно провести съ этимъ обозначеніемъ числа, т.-е. съ линіей или кускомъ, и тогда наглядно выяснится разница между числомъ и его частью и единицей и ея частью.

§ 60. Задачи на типы, пройденные въ III году. Лучшимъ средствомъ для успѣшнаго рѣшенія задачъ является постепенность въ ихъ усложненіи. Поэтому виды задачъ, проработанные въ теченіе первыхъ трехъ лѣтъ, должны имѣть мѣсто въ IV году въ нѣсколько усложненной формѣ. Изъ наиболѣе важныхъ типовъ, различающихся по способу рѣшенія, упомянемъ слѣдующіе: приведеніе къ единицѣ, пропорціональное измѣненіе, приведеніе къ общей мѣрѣ и рѣшеніе по способу частей, иначе сказать при помощи условной единицы. Изъ типовъ, различающихся содержаніемъ задачъ и слѣдов. нуждающихся, главнымъ образомъ, въ разъясненіи условія задачъ, упомянемъ: задачи на смѣшеніе перваго рода, на нахожденіе средняго ариѳметическаго числа, на нахожденіе задуманныхъ чиселъ, на встрѣчное и нагоняющее движеніе, на проценты, квадратныя и кубическія измѣренія, опредѣленіе времени.

Распространяя и повторяя въ теченіе IV года всѣ эти типы, мы не считаемъ нужнымъ и полезнымъ дополнять ихъ число еще новыми типами. И безъ того имѣется достаточно типовъ, курсъ же IV года нуждается въ нѣкоторой свободѣ отъ замысловатыхъ задачъ, такъ какъ теоретическая его часть представляетъ собой много новаго для учениковъ.

Легко можетъ случиться, что въ теченіе III года учитель не въ силахъ будетъ пройти весь положенный для того времени курсъ. Тогда квадратныя и кубическія измѣренія и задачи на вычисленіе времени останутся на IV годъ. Между тѣмъ эти отдѣлы настолько важны, что о сокращеніи ихъ и рѣчи быть не можетъ. Наоборотъ, всѣ усилія надо прилагать къ распространенію этихъ отдѣловъ, въ особенности о квадратныхъ измѣреніяхъ. Чрезвычайно желательно и со стороны образовательной и съ точки зрѣнія чисто практической, чтобы кончающіе курсъ четырехгодичной школы имѣли нѣкоторыя свѣдѣнія, хотя бы основныя, о свойствахъ линій и фигуръ, чтобы они кромѣ линейныхъ измѣреній умѣли еще находить площадь прямоугольника и треугольника.

Если бы для учителя представлялась трудность въ прохожденіи курса IV года, даннаго въ нашей методикѣ, то возможно допустить слѣдующія облегченія: a) умноженіе на дробь оставить до V года, разбирая въ IV лишь нахожденіе части числа, b) также замѣнить нахожденіемъ цѣлаго числа по данной части дѣленіе на дробь (въ случаѣ дѣленія на части); c) ограничиться простыми дробными именованными числами и не вводить составныхъ; d) отложить до послѣдующаго времени всѣ вычисленія, въ которыхъ обыкновенныя дроби встрѣчаются совмѣстно съ десятичными, при чемъ откладывается также обращеніе однѣхъ дробей въ другія; e) въ крайнемъ случаѣ не давать отдѣльнаго правила для умноженія и дѣленія десятичныхъ дробей, довольствуясь правиломъ для обыкновенныхъ дробей.

Ефремовъ, В. Краткій курсъ природовѣдѣнія, составленный по программѣ для первыхъ трехъ класс. гимн. Ч. 1-я. Воздухъ, вода и земля. Курсъ 1-го кл. съ 116 рис. М. 1910 г. Ц. 75 к., въ пер. 90 к. Ч. 2-я. Растенія. Курсъ 2-го кл. съ 159 рис. въ текстѣ. Ц. 75 к., въ перепл. 90 к. М. 1910 г. Ч. 3-я. Человѣкъ и животныя. Курсъ 3-го кл. съ 149 рис. въ текстѣ. Ц. 75 к., въ перепл. 90 к. М. 1910 г.

Козьминъ, К., преподаватель Московскаго учительскаго института. Русская хрестоматія для среднихъ классовъ средне-учебныхъ заведеній, городскихъ и уѣздныхъ училищъ. Курсъ I съ приложеніемъ плановъ для письм. упражн. Изд. 29-е. Ц. 75 к., въ перепл. 90 к. М. 1914 г. Курсъ II, изд. 20-е. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. М. 1914 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 к.

— Грамматика церковно-славянскаго языка новаго періода. Съ приложеніемъ образцовъ для этимологическаго и синтактическаго разбора текста Евангелія. Пособіе для городскихъ, уѣздныхъ и сельскихъ училищъ. Изд. 23-е. М. 1914 г. Ц. 50 к., въ перепл. 65 к. Допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., какъ руководство.

— Начальные уроки церковно-славянскаго языка и хрестоматія. Пособіе для низшихъ училищъ и приготовительныхъ классовъ средн. учебн. завед. Книга эта служитъ приложеніемъ къ „Грамматикѣ церковно-славянскаго языка". Изд. 5-е. М. 1913 т. Ц. 40 к., въ переплетѣ 55 к.

— Синтаксисъ русскаго языка для средн. учебн. завед. и городск. учил. съ приложеніемъ задачника. Изд. 16-е. М. 1913 г. Ц. 50 к., въ перепл. 65 к.

— Образцы систематическаго диктанта для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ. Ч. I. Этимологія. Сост. согласно съ руководствомъ „Русское правописаніе" акад. Я. Грота. Изд. 12-е. М. 1914 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 коп. 7-е изд. допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. къ классному употребленію въ низшихъ училищахъ.

— То же. Ч. II. Синтаксисъ. Изд. 6-е. М. 1914 г. Ц. 80 к., въ перепл. 95 к. Изд. 2-е. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. допущ. къ классн. употребл. въ низш. учил.

— Орѳографическія прописи. Пособіе при изученіи орѳографіи. Тетрадь первая. М. 1910 г. Ц. 30 коп. Изд. 2-е.

— Справочный словарь церковно-славянскаго языка. М. 1889 г. Ц. 5 к.

— Конспекты и планы объяснительнаго чтенія. Приложеніе къ русской хрестоматіи, т. I, изд. 2-е. Ц. 55 к. М. 1912 г.

— Логика.— Стилистическіе разборы образцовъ прозы и поэзіи. Пособіе при практич. изученіи стилистики, теоріи прозы и поэзіи и при веденіи объяснительнаго чтенія на высшей ступени. Для среднихъ классовъ гимназій, реальныхъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій и старшихъ классовъ городскихъ училищъ. Изд. 8-е. Одобр. Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. М. 1912 г. Ц. 1 р., въ переп. 1 р. 15 к.

— Начальная хрестоматія. Пособіе при обученіи русскому языку въ приготовительномъ и первомъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ. Изд. 4-е, съ рисунками. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 к. М. 1912 г.

— Практическая русская грамматика. Руководство для учениковъ народныхъ школъ. Изд. 17-е. М. 1913 г. Ц. 25 к.

— Приготовительный курсъ грамматики русскаго языка для городскихъ и уѣздныхъ училищъ. Изд. 25-е. М. 1914 г. Ц. 55 к., въ переплетѣ 70 к.

Козьминъ, К., и Покровскій, В. Теорія словесности. Сводъ теоретическихъ положеній, выведенныхъ изъ разбора образцовъ прозы и поэзіи. Изд. 16-е. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. М. 1914 г. Ц. 35 к.

— Біографіи и характеристики отечественныхъ образцовыхъ писателей для городскихъ училищъ и учительскихъ семинарій. Изд. 13-е. Допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. М. 1914 г. Ц. 50 к.

Коневскій, М. Историческія свѣдѣнія о богослужебномъ пѣніи въ ветхозавѣтной, новозавѣтной, вселенской и въ частности русской церквахъ, съ добавленіемъ краткихъ свѣдѣній о преподаваніи церковнаго пѣнія въ начальныхъ школахъ и организаціи пѣвческаго хора. Изд., одобренное Училищнымъ Совѣтомъ при Св. Синодѣ въ учительскія библіотеки церковно-прих. школъ. М. 1900 г. Ц. 30 к.

Кругловъ, А. В. „Литература маленькаго народа". Критико-педагогическія бесѣды по вопросамъ дѣтской литературы. 2 выпуска. Допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. въ фундаментальныя библіотеки среднихъ учебн. заведеній въ библ. учительск. инст. и семинарій и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни. М. 1897 г. Ц. каждаго вып. 85 к., въ папкѣ 1 р.

— За чужимъ горбомъ. Повѣсть для дѣтей, съ рисунками въ текстѣ. Одобрена Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для ученическихъ библіотекъ сред-

Литвиненко, К. А. Записки по грамматикѣ русскаго языка. Методическое руководство и учебное пособіе для городскихъ, приходскихъ и сельскихъ училищъ. Курсъ 3-го и 4-го года городск. училищъ. М. 1887 г. Ц. 75 к., въ перепл. 90 к.

Любутовъ, Я. Пособіе при изученіи теоріи словесности. М. 1883 г. Ц. 25 к.

Николаевскій, И., директоръ Несвижской учительской семинаріи. Руководство къ изученію главныхъ основаній педагогики въ учительскихъ семинаріяхъ Мин. Нар. Пр. Часть I. Дидактическая пропедевтика, курсъ II класса. Изд. 8-е. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., какъ руководство для учительскихъ семинарій и институтовъ и для учительскихъ библіотекъ нач. уч. М. 1915 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к.

— Часть II. Педагогическая пропедевтика, курсъ III класса. Изд. 6-е. М. 1913 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр.

Никитинъ, С. Элементарный курсъ географіи для низшихъ классовъ среднихъ учебн. заведеній и элементарныхъ школъ. Вып. 3-й. Отечествовѣдѣніе. Вып. 4-й. Міровѣдѣніе. 3-е изданіе одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. Изд. 6-е исправл. М. 1905 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к.

Остроумовъ, А., учитель пѣнія въ Поливановской учительской семинаріи. Элементарные уроки пѣнія для учителей начальныхъ училищъ и воспитанниковъ учительскихъ семинарій. М. 1899 г. Ц. 50 к.

Пастуховъ. „Дружокъ". Годъ I. Азбука для русскаго и церковно-славянскаго чтенія. Изд. 4-е. М. 1914 г. Ц. 15 к. 2-е изд. допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. къ классн. употребл.

— „Дружокъ". Годъ I. Первая послѣ азбуки книга для чтенія. Изд. 3-е. М. 1909 г. Ц. 20 к. Допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. къ классному употребленію.

— „Дружокъ". Годъ II. Вторая книжка послѣ азбуки для русскаго и церковнославянскаго чтенія. Изд. 2-е. М. 1908 г. Ц. 35 к.

Покровскій, Н. Какъ росло и строилось Русское государство. Разсказы изъ русской исторіи. Пособіе для учениковъ I и II класса гимназіи и реальныхъ училищъ. Ч. I. Изд. 6-е. 1914 г. Ц. 60 коп., въ перепл. 75 коп., съ рисунками. Часть II. Изд. 5-е. М. 1914 г. Ц. 60 коп., въ перепл. 75 коп. Допущ. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., какъ пособіе для младш. классовъ средн. учебн. заведеній и 5 класса средн. учебн. заведеній Вѣдом. Императрицы Маріи.

Рождественскій, А., преподаватель Костромского реальнаго училища. Краткій очеркъ химическихъ явленій. Примѣнительно къ программѣ для реальныхъ училищъ. М. 1896 г. Ц. 40 к., въ перепл. 55 к. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр.

Садковскій, С., протоіерей. Священная Исторія Ветхаго Завѣта, составленная въ объемѣ гимназическаго курса законоучителемъ Московской 2-й гимназіи, Вѣдомства Императрицы Маріи, принята въ качествѣ учебника въ Московскихъ гимназіяхъ Вѣдомства Императрицы Маріи. „Моск. Церк. Вѣд." 1905 г., № 39. Ц. 50 коп. Изд. 3-е. 1913 г.

Соколовъ, Аѳ. Письменныя упражненія по Закону Божію въ начальн. школѣ. Священ. исторія Новаго Завѣта и молитвы. Книжка 1-я для учащихся. М. 1904 г. Ц. 10 к.

— Письменныя упражненія по Закону Божію въ начальной школѣ. Методическія замѣтки для преподавателя Закона Божія. М. 1904 г. Ц. 10 к.

— Сборникъ диктантовъ. Дополнительная книжка къ методической грамматикѣ. Изд. 3-е. М. 1899 г. Ц. 20 к. Въ 3-мъ изд. эта книга Особ. Отд. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. одобрена къ употребленію въ народныхъ школахъ въ качествѣ учебнаго пособія.

— Методическая грамматика. Элементарное руководство по русскому языку. Допущ. Ж. М. Н. Пр. 1902 г., № 3. Ц. 25 к.

Токинъ, В., и Желтовъ, В. Опытъ методики элементарнаго курса русской исторіи. М. 1913 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 к.

Токинъ, В. Хрестоматія для дѣтей средней и низшей школы, съ рисунками въ текстѣ. М. 1915 г. Ц. 1 р.

Ширяевъ. Элементарный атласъ діаграммъ цвѣтковыхъ растеній. Курсъ городскихъ училищъ. М. 1902 г. Ц. 75 к. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. допущ. въ библ. средн. и низш. учебн. заведеній.

Юрьевъ, П. В. Начальные уроки русскаго правописанія и подготовительныя упражненія къ письму изложеній. Пособіе для учащихся въ школѣ и дома. Выпускъ 1-й. М. 1912 г. Ц. 15 к.

Ѳедоровъ. Первые уроки обученія грамотѣ по наглядно-звуковому методу. 1903 г. Ц. 20 к.

ПЕЧАТАЮТСЯ:

Беллюстинъ, В. Ариѳметическій задачникъ. Вып. 5.
